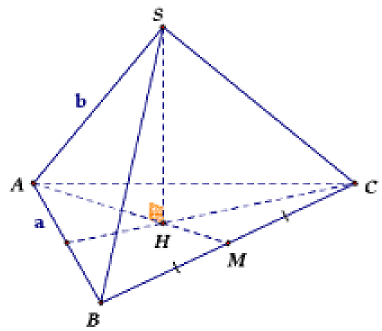
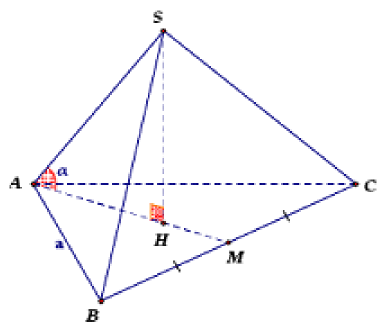
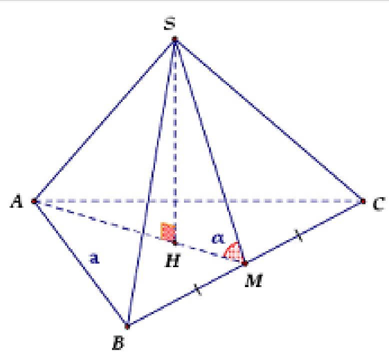
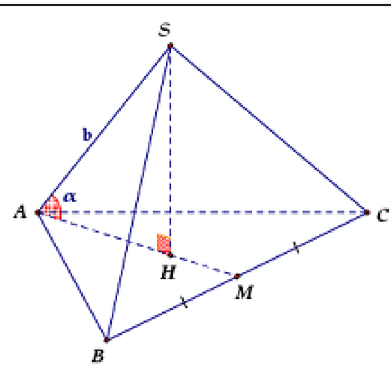
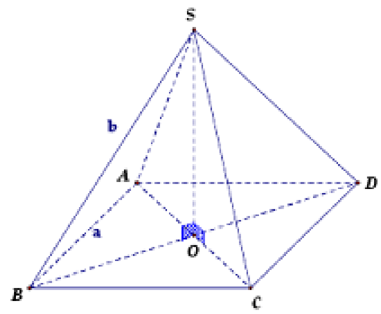
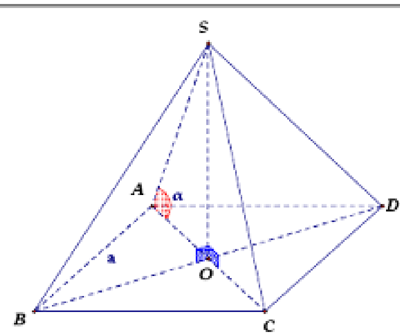
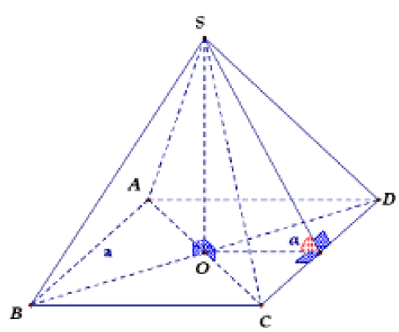
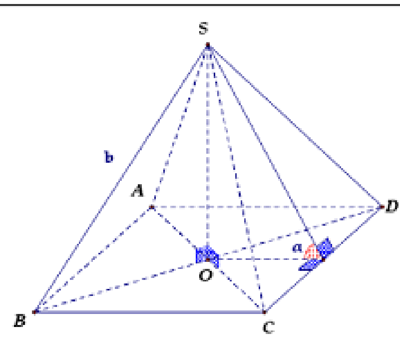
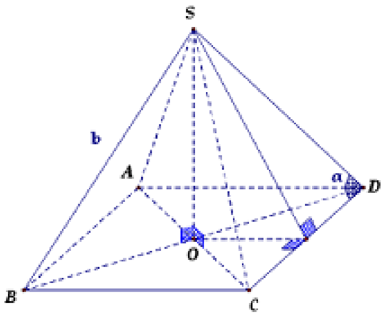
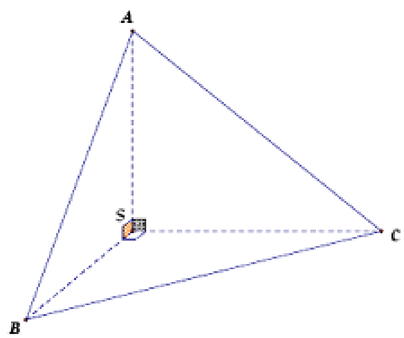
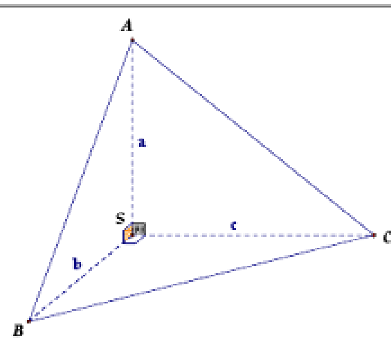
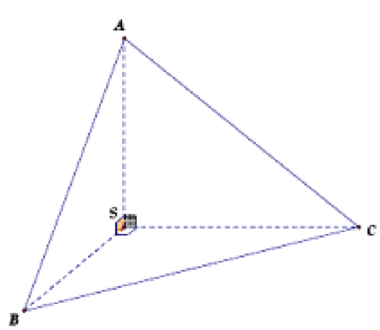
I. CÔNG THỨC TÍNH NHANH THƯỜNG GẶP CỦA THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

Tính chất	Hình vẽ	Ví dụ
Cho hình chóp đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b. Khí đó: $V_{S.ABC}=\frac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{12}$		Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp là: A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ $V_{S.ABC}=\frac{a^2\sqrt{3\left(a\sqrt{3}\right)^2-a^2}}{12}=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}\Rightarrow \boxed{B}$
Cho hình chóp đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng α. Khi đó: $V_{S.ABC}=\frac{a^3}{12}.\tan\alpha$		Cho hình chóp đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Thể tích khối chóp là: A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$ $V_{S.ABC}=\frac{a^3}{12}.\tan 60^0=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}\Rightarrow \boxed{C}$
Cho hình chóp đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng α. Khi đó: $V_{S.ABC}=\frac{a^3}{24}.\tan\alpha$		Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. Thể tích khối chóp là: A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$ $V_{S.ABC}=\frac{(2a)^3}{24}.\tan 60^0=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \boxed{A}$
Cho hình chóp đều $S.ABC$ có bên bằng b và góc giữa cạnh bên với mặt đáy bằng α. Khi đó: $V_{S.ABC}=\frac{\sqrt{3}b^3}{4}.\sin\alpha\cos^2\alpha$		Cho hình chóp đều $S.ABC$ có bên bằng a và góc giữa cạnh bên với mặt đáy bằng 60^0. Thể tích khối chóp là: A. $\frac{3a^3}{8}$ B. $\frac{3a^3}{16}$ C. $\frac{3a^3}{24}$ D. $\frac{3a^3}{32}$ $V_{S.ABC}=\frac{\sqrt{3}a^3}{4}.\sin 60^0\cos^2 60^0=\frac{3a^3}{32}\Rightarrow \boxed{D}$

Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b. Khí đó: $V_{S.ABCD}=\dfrac{a^2\sqrt{4b^2-2a^2}}{6}$		Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Thể tích khối chóp là: A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$ B. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$ C. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$ D. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ $V_{S.ABCD}=\dfrac{a^2\sqrt{4\left(a\sqrt{5}\right)^2-2a^2}}{6}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\boxed{B}$
Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng α. Khí đó: $V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}\tan\alpha$		Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Thể tích khối chóp là: A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$ B. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ C. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$ D. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$ $V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}\tan 60^0=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}\Rightarrow\boxed{A}$
Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng α. Khí đó: $V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3}{6}\tan\alpha$		Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 45^0. Thể tích khối chóp là: A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ B. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ C. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$ D. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$ $V_{S.ABCD}=\dfrac{\left(a\sqrt{2}\right)^3}{6}\tan 45^0=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}\Rightarrow\boxed{C}$
Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng b, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng α. Khí đó: $V_{S.ABCD}=\dfrac{4a^3\tan\alpha}{3\sqrt{\left(2+\tan^2\alpha\right)^3}}$		Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 45^0. Thể tích khối chóp là: A. $\dfrac{a^3}{3}$ B. $\dfrac{2a^3}{3}$ C. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$ D. $\dfrac{4a^3}{3}$ $V_{S.ABCD}=\dfrac{4\left(a\sqrt{3}\right)^3\tan 45^0}{3\sqrt{\left(2+\tan^2 45^0\right)^3}}=\dfrac{4a^3}{3}\Rightarrow\boxed{D}$

Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và góc ở đáy của mặt bên bằng α với $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{\tan^2\alpha - 1}}{6}$		Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. Thể tích khối chóp là: A. $\frac{a^3}{6}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{\tan^2 60^o - 1}}{6} = \frac{a\sqrt{2}}{6} \Rightarrow \boxed{C}$
Cho hình chóp $S.ABC$ có ba mặt phẳng (SAB), (SAC), (SBC) đôi một vuông góc và có diện tích lần lượt là S_1, S_2, S_3 Khí đó: $V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2S_1.S_2.S_3}}{3}$		Cho hình chóp $S.ABC$ có ba mặt phẳng (SAB), (SAC), (SBC) đôi một vuông góc và diện tích của các tam giác SAB, SBC, SCA lần lượt là $15cm^2$, $20cm^2$ và $12cm^2$. Thể tích khối chóp là: A. $20\sqrt{2}$ B. 20 C. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{20\sqrt{2}}{3}$ $V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2.15.20.12}}{3} = 20\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{A}$
Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc. Biết $SA = a, SB = b, SC = c$. Khí đó: $V_{S.ABC} = \frac{1}{6}abc$		Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc. Biết $SA = 5$, $SB = 4$ và $SC = 3$. Thể tích khối chóp là: A. 20 B. 10 C. 30 D. 60 Khí đó: $V_{S.ABC} = \frac{1}{6}5.4.3 = 10 \Rightarrow \boxed{B}$
Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc. Biết $AB = a, BC = b, CA = c$.  $V_{S.ABC} = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}{2}}$		Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc. Biết $AB = \sqrt{5}, BC = \sqrt{13}$ và $AC = \sqrt{10}$. Thể tích khối chóp là: A. 2 B. 1 C. 5 D. 10 $V_{S.ABC} = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{(10+5-13)(5+13-10)(10+13-5)}{2}} = 1 \Rightarrow \boxed{B}$

II. XÁC ĐỊNH TÂM VÀ BÁN KÍNH MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP

1. Phương pháp chung.

Bước 1: *Xác định tâm của đa giác đáy:*

- *Tam giác đều: Giao của 3 đường trung tuyến*
- *Tam giác vuông: trung điểm của cạnh huyền*
- *tam giác thường: giao của 3 đường trung trực (ít gặp)*
- *Hình vuông, hình chữ nhật: giao điểm 2 đường chéo.*

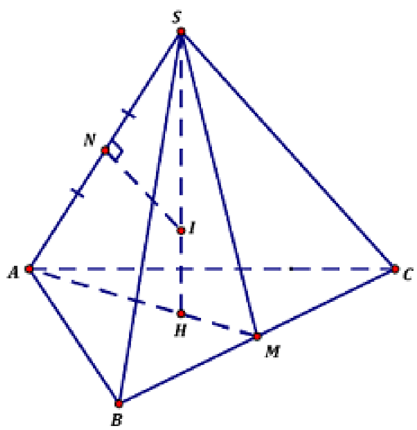
Bước 2: *Kẻ (d) qua tâm và vuông góc với đáy (trục của đáy).*

Bước 3: *Trong mặt phẳng chứa cạnh bên và trục (d). Kẻ trung trực (Δ) của cạnh bên, (Δ) cắt (d) ở I thì I là tâm của mặt cầu.*

2. Các mô hình thường gặp

<table>
<tr>
<td>

Mô hình 1: Hình chóp đều $S.ABC$

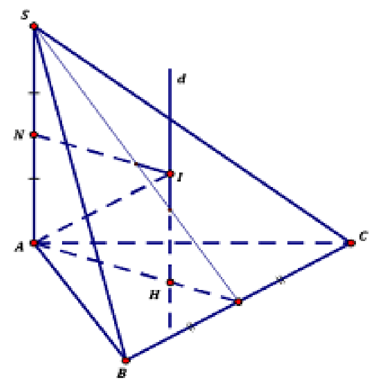


+) Ưu tiên tính $R = SI$

+) Công thức: $SN.SA = SI.SH$

</td>
<td>

Mô hình 2: Hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều.

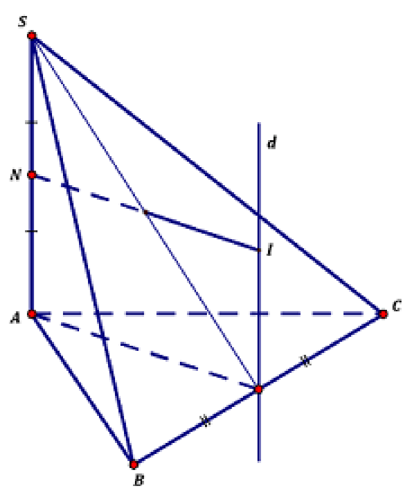


+) Ưu tiên tính $R = AI$

+) Công thức: $AI^2 = AN^2 + AH^2$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Mô hình 3: Hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A.

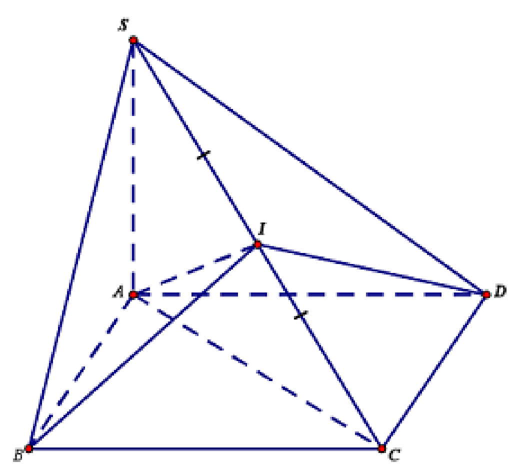


+) Ưu tiên tính $R = AI$

+) Công thức: $AI^2 = AN^2 + AM^2$

</td>
<td>

Mô hình 4: Hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, ABCD là hình vuông (hình chữ nhật).

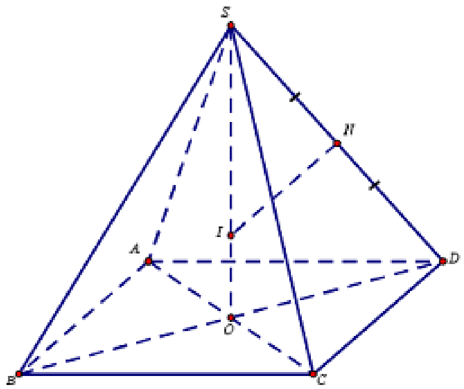


+) Ưu tiên tính $R = IS = IC$

+) Công thức: $SI = IC = \frac{BC^2}{2}$

</td>
</tr>
</table>

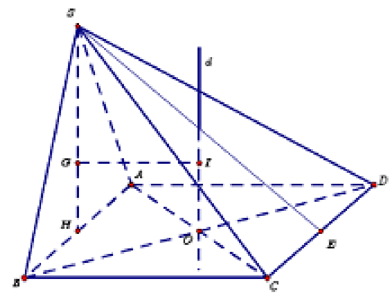
Mô hình 5: Hình chóp đều $S.ABCD$



+) Ưu tiên tính $R = SI$

+) Công thức: $SN.SD = SI.SO$

Mô hình 6: Hình chóp $S.ABCD$ có ΔSAB cân, $(SAB) \perp (ABCD)$, ABCD là hình vuông (hình chữ nhật).

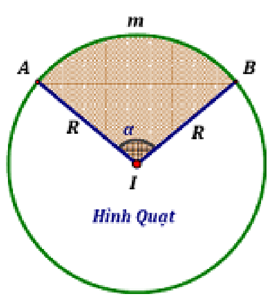


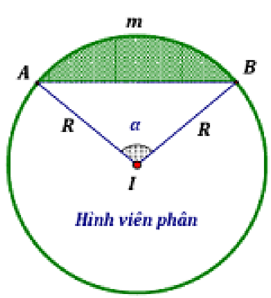
+) Ưu tiên tính $R = SI$

+) Công thức: $IS^2 = IG^2 + SG^2$

III. DIỆN TÍCH MẶT CẦU – THỂ TÍCH KHỐI CẦU

1. DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN – HÌNH VIÊN PHÂN – HÌNH QUẠT TRÒN.



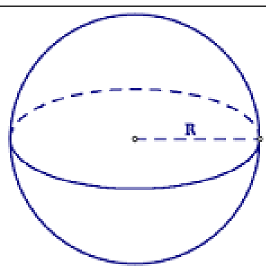


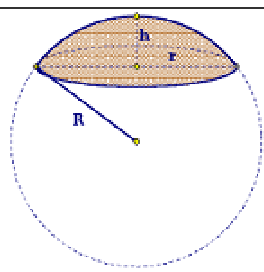
+) Diện tích hình tròn bán kính R: $S_T = \pi R^2$

+) Diện tích hình quạt tròn: $S_{qt} = \dfrac{\alpha R^2}{2}$ (α_radial)

+) Diện tích hình viên phân: $S_{vp} = \dfrac{\alpha - \sin\alpha}{2} R^2$

II. MẶT CẦU – CHỎM CẦU





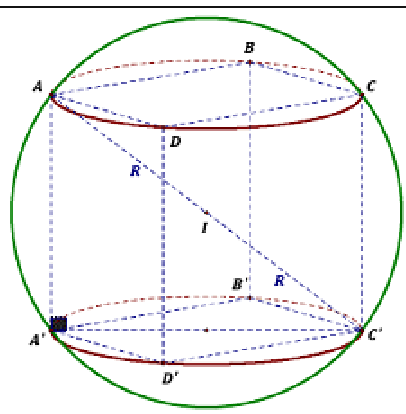
+) Diện tích mặt cầu: $S_{mc} = 4\pi R^2$

+) Diện tích chỏm cầu chiều cao h: $S_{xq} = 2\pi Rh = \pi\left(r^2 + h^2\right)$

+) Thể tích khối cầu: $V_{kc} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

+) Thể tích chỏm cầu: $V_{cc} = \pi h^2\left(R - \dfrac{h}{3}\right) = \dfrac{\pi h}{6}\left(h^2 + 3r^2\right)$

III. MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH HỘP CHỮ NHẬT – HÌNH LẬP PHƯƠNG



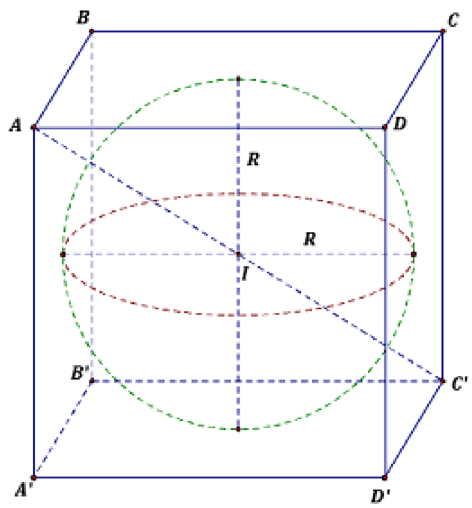
+) Mặt cầu (S) ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AB = a, AD = b, AA' = c$. Ta có:

- Tâm I là trung điểm của AC'

- Bán kính $R = \dfrac{AC'}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

+) Đặc biệt: $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương cạnh a:

$R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



+) *Mặt cầu* (S) *tâm* I *bán kính* R, *nội tiếp hình lập phương* $ABCD.A'B'C'D'$ *cạnh* a.

- *Tâm* I *là trung điểm của* AC' *(Hoặc lấy trung điểm của đoạn thẳng nối tâm của 2 mặt đối diện).*

- *Bán kính* $R=\dfrac{a}{2}$

+) *Gọi* $(S_1),(S_2)$ *là mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp hình lập phương* $ABCD.A'B'C'D'$ *cạnh* a. *Ta có:*

$$V_1=\frac{4}{3}\pi R_1^3,\ V_2=\frac{4}{3}\pi R_2^3 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2}=\frac{R_1^3}{R_2^3}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

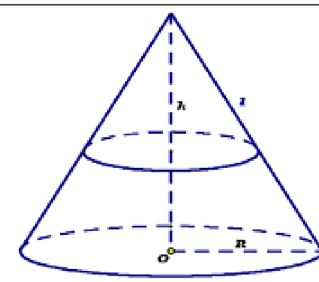
IV. MẶT NÓN – KHỐI NÓN

1. Hình nón, khối nón:

+) $V_N=\dfrac{1}{3}\pi R^2 h$

+) $S_{xq}=\pi R l$

+) $S_{tp}=\pi R(R+l)$

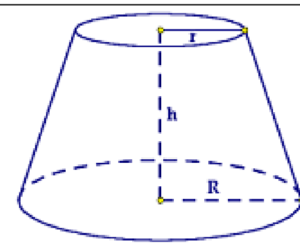


2. Hình nón cụt, khối nón cụt:

+) $S_{xq}=\pi l(R+r)$

+) $S_{tp}=\pi\left(R^2+r^2+l(R+r)\right)$

+) $V_{NC}=\dfrac{1}{3}\pi h\left(R^2+r^2+Rr\right)$



3. Thiết diện

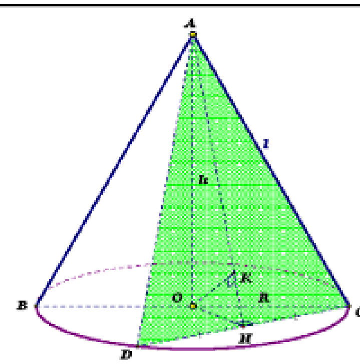
+) *Thiết diện qua trục là tam giác* ABC *cân tại* A *và* $S_{ABC}=Rh$

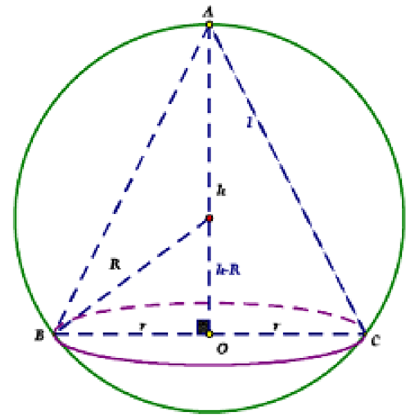
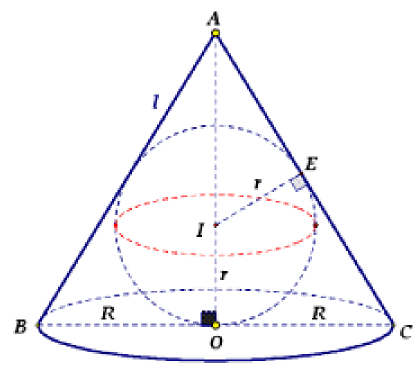
+) *Thiết diện qua đỉnh không chứa trục là tam giác cân* SCD, *thiết diện cắt đáy theo dây cung* CD *ta có:*

- *Góc giữa thiết diện và đáy:* $(ACD,BCD)=\widehat{AHO}$

- *Góc giữa trục và thiết diện:* $(AO,(ACD))=\widehat{OAH}$

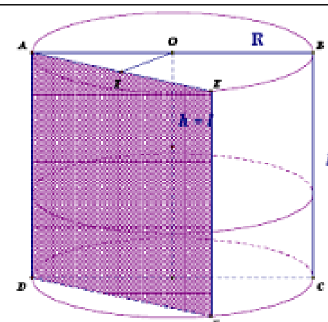
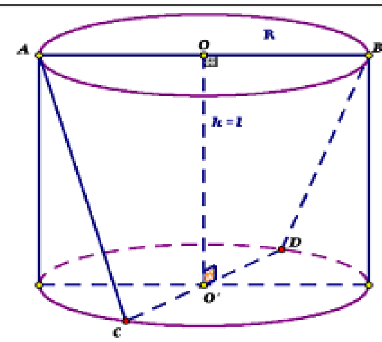
- *Khoảng cách từ tâm đáy đến thiết diện:* $d(O,(ACD))=OK$

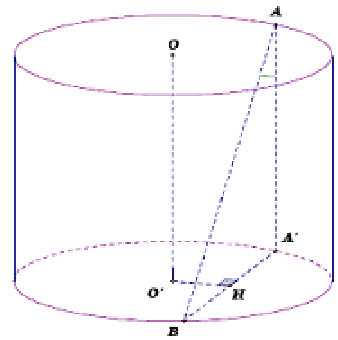
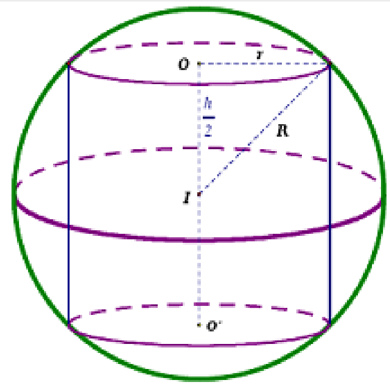
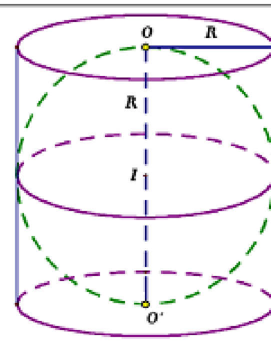


4. Mặt cầu (S) tâm I bán kính R, ngoại tiếp hình nón bán kính r đường cao h. $R=\dfrac{h^2+r^2}{2h}$. *+) Trong các khối nón nội tiếp mặt cầu (S) tâm I, bán kính không đổi R. Khối nón có thể tích lớn nhất khi $h=\dfrac{4}{3}R, r=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$. Khi đó $V_n=\dfrac{32}{81}R^3$*	
5. Mặt cầu (S) tâm I, bán kính r nội tiếp trong mặt nón (N) bán kính R, đường cao h, đường sinh l. Ta có: *+) Dựng tâm I :* *- Lấy $E\in AC$ sao cho $OC=EC$* *- Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với AC và cắt AO tại I thì I là tâm mặt cầu nội tiếp mặt nón (N).* *+) Bán kính mặt cầu (S): $r=\dfrac{hR}{l+R}$*	

V. MẶT TRỤ - KHỐI TRỤ

1. CÔNG THỨC CƠ BẢN

+) $V_T=\pi R^2h,\ S_{xq}=2\pi rh,\ S_{tp}=2\pi R(R+h)$ *+) Thiết diện vuông góc với trục là đường tròn bán kính R* *+) Thiết diện chứa trục là hình chữ nhật $ABCD$ diện tích $S=2Rh$* *+) Thiết diện song song với trục là hình chữ nhật $AEFD$ có khoảng cách giữa trục và thiết diện là $d(OO',AEFD)=OI$.*	
+) Gọi AB, CD là hai đường kính bất kì trên hai mặt đáy của hình trụ ta có: $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}AB.CD.OO'.\sin(AB,CD)$ **+) Đặc biệt:** *Nếu $AB\perp CD$ ta có:* $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}AB.CD.OO'$	

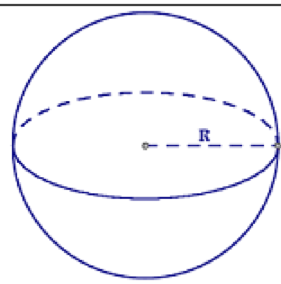
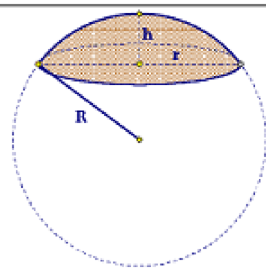
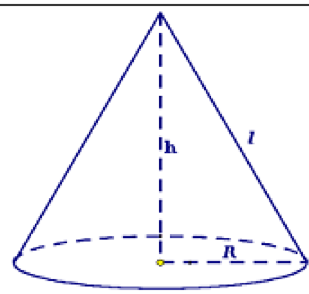
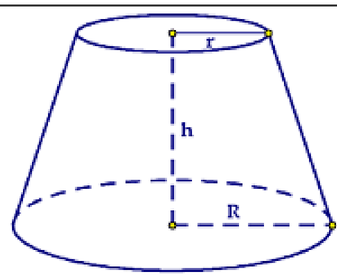
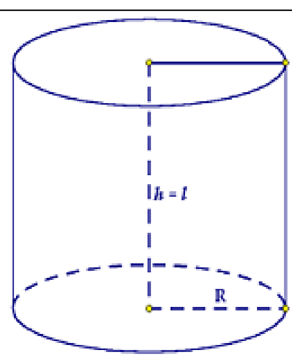
+) A, B lần lượt là các điểm trên các đường tròn đáy của hình trụ ta có: - Góc giữa AB và trục OO': $(AB, OO') = \widehat{A'AB}$ - Khoảng cách giữa AB và OO': $d(AB, OO') = O'H$	
+) Mặt cầu ngoại tiếp khối trụ có bán kính đáy r và đường cao h có: $R = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}}$ và $V_{KC} = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}}\right)^3$ +) Trong các hình trụ nội tiếp mặt cầu thì hình trụ có thiết diện qua trục lớn nhất khi $r = \frac{R\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow R = r\sqrt{2} \Rightarrow h = r = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Tức là khi đó thiết diện là một hình vuông. +) Trong các hình trụ có đường cao h và bán kính r nội tiếp mặt cầu thì hình trụ có thể tích lớn nhất khi $h^2 = 2r^2 \Leftrightarrow h = r\sqrt{2}$.	
+) Cho hình trụ (H) có bán hính R và đường cao $2R$. (S) là mặt cầu nội tiếp hình trụ (H) ta có: - tỉ số diện tích: $\frac{S_{tp}(S)}{S_{tp}(H)} = \frac{2}{3}$ - Tỉ số thể tích: $\frac{V_{(S)}}{V_{(H)}} = \frac{2}{3}$	

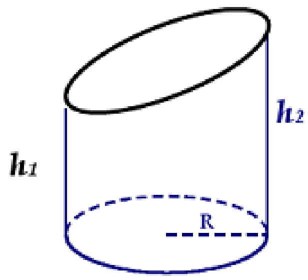
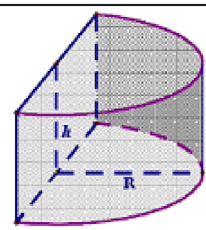
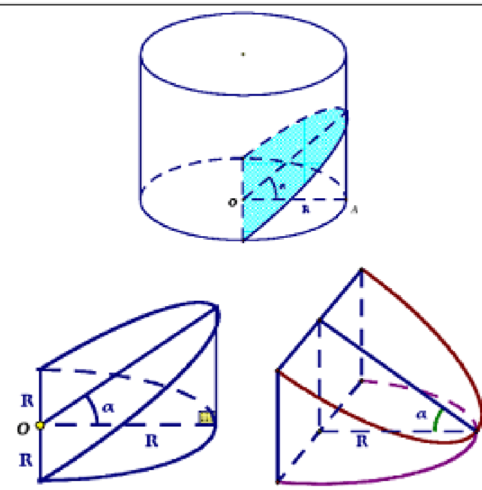
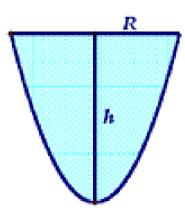
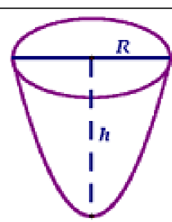
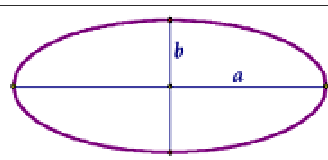
Chú ý:

1. Một hình trụ có diện tích toàn phần không đổi S. Có thể tích lớn nhất khi và chỉ khi $h = 2R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$

2. Một hình trụ có thể tích không đổi V. Có diện tích toàn phần nhỏ nhất khi $h = 2R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

VI. TỔNG HỢP CÔNG THỨC
DIỆN TÍCH MẶT TRÒN XOAY – THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

	Hình vẽ	Công thức – Tính chất
Hình cầu		+) Diện tích mặt cầu: $S_{mc} = 4\pi R^2$ +) Thể tích khối cầu: $V_{KC} = \frac{4}{3}\pi R^3$
Chỏm cầu		+) Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi Rh = \pi\left(r^2 + h^2\right)$ +) Thể tích: $\pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) = \frac{\pi h}{6}\left(h^2 + 3r^2\right)$
Hình nón		+) Diện tích đáy: $S_{đ} = \pi R^2$ +) Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi Rl$ +)Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{đ} + S_{xq} = \pi R\left(R + l\right)$ +) Thể tích: $V_{KN} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$
Hình nón cụt		+) $S_{xq} = \pi l\left(R + r\right)$ +) $V_{NC} = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$
Hình trụ		+) $S_{xq} = 2\pi Rh$ +) $V_{KT} = \pi R^2 h$

Hình trụ cụt		+) $S_{xq} = \pi R\left(h_1 + h_2\right)$ +) $V_{TC} = \frac{1}{2}\pi R^2\left(h_1 + h_2\right)$
Nửa khối trụ		+) $V = \frac{1}{2}\pi R^2 h = \frac{1}{2}V_{KT}$
Hình nêm		+) $V_1 = \frac{2}{3}R^3 \tan\alpha$ +) $V_2 = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)R^3 \tan\alpha = V - V_1$
Diện tích giới hạn bởi một phần Parabol		+) $S_{Parabol} = \frac{4}{3}Rh$
Thể tích khối tròn xoay sinh bởi Parabol		+) $V_{Parabol} = \frac{1}{2}\pi R^2 h = \frac{1}{2}V_{KT}$
Diện tích và thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi Elip		+) $S_E = \pi ab$ +) $V_{2a} = \frac{4}{3}\pi ab^2$ +) $V_{2b} = \frac{4}{3}\pi a^2 b$

TÓM TẮT LÝ THUYẾT VÀ GIẢI NHANH TOÁN 12

PHẦN 1. HÀM SỐ

SỰ ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa

$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2$ *(K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng).*

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow y = f(x)$ **đồng biến** trên K đồ thị ***đi lên*** từ trái sang phải.

$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow y = f(x)$ **nghịch biến** trên K đồ thị ***đi xuống*** từ trái sang phải.

Chú ý: + Nếu $f'(x) > 0,\ \forall x \in (a;b) \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ **đồng biến** trên khoảng $(a;b)$.

+ Nếu $f'(x) < 0,\ \forall x \in (a;b) \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ **nghịch biến** trên khoảng $(a;b)$.

+ Nếu $f'(x) = 0,\ \forall x \in (a;b) \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ **không đổi** trên khoảng $(a;b)$.

+ Nếu $f(x)$ **đồng biến** trên khoảng $(a;b) \Rightarrow f'(x) \ge 0,\ \forall x \in (a;b)$.

+ Nếu $f(x)$ **nghịch biến** trên khoảng $(a;b) \Rightarrow f'(x) \le 0, \forall x \in (a;b)$.

2. Quy tắc và công thức tính đạo hàm

Quy tắc tính đạo hàm: Cho $u = u(x);\ v = v(x);\ C$: là hằng số .

Tổng, hiệu: $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

Tích: $(u.v)' = u'.v + v'.u \Rightarrow (C.u)' = C.u'$.

Thương: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - v'.u}{v^2}$, $(v \ne 0) \Rightarrow \left(\dfrac{C}{u}\right)' = -\dfrac{C.u'}{u^2}$

Đạo hàm hàm hợp: Nếu $y = f(u),\ u = u(x) \Rightarrow y'_x = y'_u.u'_x$.

Bảng công thức tính đạo hàm:

Đạo hàm của hàm sơ cấp	Đạo hàm của hàm hợp
$(C)' = 0$ (C là hằng số).	$(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$
$(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}\ (x \ne 0)$ $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ (x > 0)$	$(u^\alpha)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$ $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}\ (u \ne 0)$ $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}\ (u > 0)$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'.\cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'.\sin u$

$\left(\tan x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left(\tan u\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$\left(\cot x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\left(\cot u\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^u\right)' = u'.e^u$
$\left(a^x\right)' = a^x.\ln a$	$\left(a^u\right)' = u'.a^u.\ln a$
$\left(\ln\lvert x\rvert\right)' = \dfrac{1}{x}$	$\left(\ln\lvert u\rvert\right)' = \dfrac{u'}{u}$
$\left(\log_a\lvert x\rvert\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$	$\left(\log_a\lvert u\rvert\right)' = \dfrac{u'}{u.\ln a}$

Công thức tính nhanh đạo hàm hàm phân thức:

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}\ ; \qquad \left(\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+cx+f}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix}x^2 + 2\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}x + \begin{vmatrix} b & c \\ c & f \end{vmatrix}}{\left(dx^2+cx+f\right)^2}.$$

Đạo hàm cấp 2 :

+ *Định nghĩa:* $f''(x) = \left[f'(x)\right]'$

+ *Ý nghĩa cơ học:* Gia tốc tức thời của chuyển động $s = f(t)$ tại thời điểm t_0 là:

$a(t_0) = f''(t_0)$.

*** <u>Một số chú ý:</u>**

- Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cùng đồng biến (nghịch biến) trên K thì hàm số

  $f(x)+g(x)$

  cũng đồng biến (nghịch biến) trên K. Tính chất này có thể không đúng đối với hiệu $f(x)-g(x)$.
- Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số dương và cùng đồng biến (nghịch biến) trên K thì hàm số $f(x).g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên K. Tính chất này có thể không đúng khi các hàm số $f(x), g(x)$ không là các hàm số dương trên K.
- Cho hàm số $u = u(x)$, xác định với $x \in (a;b)$ và $u(x) \in (c;d)$. Hàm số $f\left[u(x)\right]$ cũng xác định với $x \in (a;b)$.

Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số.

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên K

+ Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm $x \in K$ thì hàm số f đồng biến trên K.
+ Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm $x \in K$ thì hàm số f nghịch biến trên K.

Chú ý:

* Đối với hàm phân thức hữu tỉ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ \left(x\neq -\dfrac{d}{c}\right)$ thì dấu " = " khi xét dấu đạo hàm y' không xảy ra.

Giả sử $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow f'\left(x\right)=3ax^2+2bx+c.$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$	Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f'\left(x\right)\geq 0;\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\ \Delta\leq 0\end{cases}\\ \begin{cases}a=0\\ b=0\\ c>0\end{cases}\end{array}\right.$	$\Leftrightarrow f'\left(x\right)\leq 0;\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a<0\\ \Delta\leq 0\end{cases}\\ \begin{cases}a=0\\ b=0\\ c<0\end{cases}\end{array}\right.$

Trường hợp 2 thì hệ số c khác 0 vì khi $a=b=c=0$ thì $f\left(x\right)=d$

(Đường thẳng song song hoặc trùng với trục Ox thì không đơn điệu)

** Với dạng toán tìm tham số m để hàm số bậc ba đơn điệu một chiều trên khoảng có độ dài bằng l ta giải như sau:*

+ <u>Bước 1</u>: Tính $y'=f'\left(x;m\right)=ax^2+bx+c.$

+ <u>Bước 2</u>: Hàm số đơn điệu trên $\left(x_1;x_2\right)\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ a\neq 0\end{cases}\quad\left(*\right)$$

+ <u>Bước 3</u>: Hàm số đơn điệu trên khoảng có độ dài bằng l

$$\Leftrightarrow\left|x_1-x_2\right|=l\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2=l^2\Leftrightarrow S^2-4P=l^2\quad\left(**\right)$$

+ <u>Bước 4</u>: Giải $\left(*\right)$ và giao với $\left(**\right)$ để suy ra giá trị m cần tìm.

CỰC TRỊ HÀM SỐ

1. Định nghĩa

Giả sử hàm số f xác định trên tập K và $x_0\in K$.

+ x_0 là **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $\left(a;b\right)$ chứa x_0 sao cho $\left(a;b\right)\subset K$ và $f\left(x\right)>f\left(x_0\right),\forall x\in\left(a;b\right)\setminus\left\{x_0\right\}$.

Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f.

+ x_0 là **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $\left(a;b\right)$ chứa x_0 sao cho $\left(a;b\right)\subset K$ và $f\left(x\right)<f\left(x_0\right),\forall x\in\left(a;b\right)\setminus\left\{x_0\right\}$.

Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f.

+ Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là **điểm cực trị**.
+ Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là **cực trị**.
+ Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là ***điểm cực trị của hàm số*** và điểm cực trị phải là một điểm trong tập hợp K.

Chú ý:

* Đối với hàm phân thức hữu tỉ $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}\ \left(x \neq -\dfrac{d}{c}\right)$ thì dấu " = " khi xét dấu đạo hàm y' không xảy ra.

Giả sử $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$	Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f'(x) \geq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c > 0 \end{cases} \end{array}\right.$	$\Leftrightarrow f'(x) \leq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c < 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Trường hợp 2 thì hệ số c khác 0 vì khi $a = b = c = 0$ thì $f(x) = d$

(Đường thẳng song song hoặc trùng với trục Ox thì không đơn điệu)

** Với dạng toán tìm tham số m để hàm số bậc ba đơn điệu một chiều trên khoảng có độ dài bằng l ta giải như sau:*

+ Bước 1: Tính $y' = f'(x;m) = ax^2 + bx + c$.

+ Bước 2: Hàm số đơn điệu trên $(x_1;x_2) \Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \quad (*)$$

+ Bước 3: Hàm số đơn điệu trên khoảng có độ dài bằng l

$$\Leftrightarrow |x_1 - x_2| = l \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = l^2 \Leftrightarrow S^2 - 4P = l^2 \quad (**)$$

+ Bước 4: Giải $(*)$ và giao với $(**)$ để suy ra giá trị m cần tìm.

CỰC TRỊ HÀM SỐ

1. Định nghĩa

Giả sử hàm số f xác định trên tập K và $x_0 \in K$.

+ x_0 là **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$.

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f.

+ x_0 là **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$.

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f.

+ Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là **điểm cực trị**.

+ Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là **cực trị**.

+ Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là ***điểm cực trị của hàm số*** và điểm cực trị phải là một điểm trong tập hợp K.

+ Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là ***giá trị cực trị (hay cực trị)*** *của hàm số.*

+ Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị** hàm số f.

2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Định lí 1: Giả sử hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Chú ý:

+ Đạo hàm $f'(x)$ *có thể* bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0.
+ Hàm số *có thể* đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.
+ Hàm số *chỉ có thể* đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm.

3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

Định lí 2: Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0)=0$. Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

+ Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

<u>Quy tắc tìm cực trị</u>

Quy tắc 1:

+ *Bước 1:* Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
+ *Bước 2:* Tìm các điểm x_i $(i = 1; 2; \ldots)$ mà tại đó *đạo hàm của hàm số bằng* 0 hoặc hàm số *liên tục nhưng không có đạo hàm.*
+ *Bước 3:* Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ ***đổi dấu khi đi*** *qua* x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.

Định lí 3: Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$ với $h > 0$.

+ Nếu $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại x_0.
+ Nếu $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại x_0.

Từ định lí trên, ta có một quy tắc khác để tìm cực trị của hàm số

Quy tắc 2:

+ *Bước 1:* Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
+ *Bước 2:* Tìm các nghiệm x_i $(i = 1; 2; \ldots)$ của phương trình $f'(x) = 0$.
+ *Bước 3:* Tính $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.
    * Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i.
    * Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i.

MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CỰC TRỊ HÀM SỐ

I. CỰC TRỊ CỦA HÀM ĐA THỨC BẬC BA:

1. Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu thỏa mãn hoành độ cho trước

Bài toán tổng quát: Cho hàm số $y = f(x;m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện K cho trước.

Phương pháp:

+ ***Bước 1:***
  * Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
  * Đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c = Ax^2 + Bx + C$

+ ***Bước 2:***

Hàm số có cực trị (hay có hai cực trị, hai cực trị phân biệt hay có cực đại và cực tiểu)

$\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và y' đổi dấu qua 2 nghiệm đó

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 3a \neq 0 \\ \Delta_{y'} = B^2 - 4AC = 4b^2 - 12ac > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$$

+ ***Bước 3:*** Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$.

Khi đó: $$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{B}{A} = -\dfrac{2b}{3a} \\ x_1 . x_2 = \dfrac{C}{A} = \dfrac{c}{3a} \end{cases}.$$

Bước 4: Biến đổi điều kiện K về dạng tổng S và tích P. Từ đó giải ra tìm được $m \in D_2$.

Bước 5: Kết luận các giá trị m thỏa mãn: $m = D_1 \cap D_2$.

*** Chú ý:** Hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a \neq 0)$.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Điều kiện	*Kết luận*
$b^2 - 3ac \leq 0$	Hàm số không có cực trị.
$b^2 - 3ac > 0$	Hàm số có hai điểm cực trị.

➢ ***Điều kiện để hàm số có cực trị cùng dấu, trái dấu.***

- *Hàm số có 2 cực trị trái dấu*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0$.

- *Hàm số có hai cực trị cùng dấu*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ P = x_1 . x_2 = \dfrac{C}{A} > 0 \end{cases}$

- *Hàm số có hai cực trị cùng dấu dương*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\dfrac{B}{A} > 0 \\ P = x_1 . x_2 = \dfrac{C}{A} > 0 \end{cases}$

- *Hàm số có hai cực trị cùng dấu âm*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\dfrac{B}{A} < 0 \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{C}{A} > 0 \end{cases}$

➢ ***Tìm điều kiện để hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn:***

$$\left\langle \begin{array}{l} x_1 < \alpha < x_2 \\ x_1 < x_2 < \alpha \\ \alpha < x_1 < x_2 \end{array} \right.$$

- Hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < \alpha < x_2$

$$\Leftrightarrow (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0 \Leftrightarrow x_1.x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 < 0$$

- Hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2 < \alpha$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1.x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\alpha \end{cases}$$

- Hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $\alpha < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ x_1 + x_2 > 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1.x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 2\alpha \end{cases}$$

- Phương trình bậc 3 có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng

khi có 1 nghiệm là $x = \dfrac{-b}{3a}$, có 3 nghiệm lập thành cấp số nhân khi có 1 nghiệm là $x = -\sqrt[3]{\dfrac{d}{a}}$.

2. Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có các điểm cực đại, cực tiểu nằm cùng phía, khác phía so với một đường thẳng

Vị trí tương đối giữa 2 điểm với đường thẳng:

Cho 2 điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$.

Nếu $(ax_A + by_A + c)(ax_B + by_B + c) < 0$ thì hai điểm A, B nằm về hai phía so với đường thẳng Δ.

Nếu $(ax_A + by_A + c)(ax_B + by_B + c) > 0$ thì hai điểm A, B nằm cùng phía so với đường thẳng Δ.

Một số trường hợp đặc biệt:

+ Các điểm cực trị của đồ thị nằm *cùng về 1 phía đối với trục Oy*

$\Leftrightarrow$ hàm số có 2 cực trị cùng dấu

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu

+ Các điểm cực trị của đồ thị nằm *cùng về 2 phía đối với trục Oy*

$\Leftrightarrow$ hàm số có 2 cực trị trái dấu

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu

+ Các điểm cực trị của đồ thị nằm *cùng về 1 phía đối với trục Ox*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CĐ}.y_{CT} > 0$

Đặc biệt:

+ Các điểm cực trị của đồ thị nằm *cùng về phía trên đối với trục Ox*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{CĐ} \cdot y_{CT} > 0 \\ y_{CĐ} + y_{CT} > 0 \end{cases}$

Các điểm cực trị của đồ thị nằm *cùng về phía dưới đối với trục Ox*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{CĐ} \cdot y_{CT} > 0 \\ y_{CĐ} + y_{CT} < 0 \end{cases}$.

+ Các điểm cực trị của đồ thị nằm *về 2 phía đối với trục Ox*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CĐ} \cdot y_{CT} < 0$

(áp dụng khi không nhẩm được nghiệm và viết được phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số)

Hoặc: Các điểm cực trị của đồ thị nằm *về 2 phía đối với trục Ox*

$\Leftrightarrow$ đồ thị cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt (*áp dụng khi nhẩm được nghiệm*)

3. Phương trình đường thẳng qua các điểm cực trị

$g(x) = \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a}\right)x + d - \frac{bc}{9a}$ *hoặc* $g(x) = 9ay - \frac{y'.y''}{2}$ *hoặc* $g(x) = y - \frac{y'.y''}{3y'''}$

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc 3 là

$$AB = \sqrt{\frac{4c + 16c^3}{a}} \text{ với } c = \frac{b^2 - 3ac}{9a}$$

II. CỰC TRỊ CỦA HÀM BẬC 4 TRÙNG PHƯƠNG $y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$

MỘT SỐ KẾT QUẢ CẦN NHỚ

+ Hàm số có một cực trị $\Leftrightarrow ab \geq 0$.

+ Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$.

+ Hàm số có đúng một cực trị và cực trị là cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$.

+ Hàm số có đúng một cực trị và cực trị là cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.

+ Hàm số có hai cực tiểu và một cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$.

+ Hàm số có một cực tiểu và hai cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

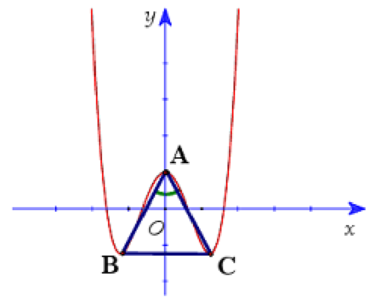
Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị: $A(0;c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

tạo thành tam giác ABC thỏa mãn dữ kiện: $ab < 0$.

MỘT SỐ CÔNG THỨC GIẢI NHANH

Đặt : $\widehat{BAC} = \alpha$

Tổng quát: $\boxed{\cot^2\frac{\alpha}{2} = \frac{-b^3}{8a}}$



Dữ kiện	Công thức thỏa mãn $ab < 0$
Tam giác ABC vuông cân tại A	$b^3 = 8a$
Tam giác ABC đều	$b^3 = 24a$
Tam giác ABC có diện tích $S_{\Delta ABC} = S_0$	$32a^3(S_0)^2 + b^5 = 0$
Tam giác ABC có diện tích $max(S_0)$	$S_0 = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$
Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp $r_{\Delta ABC} = r_0$	$r = \dfrac{b^2}{4\lvert a\rvert\left(1+\sqrt{1-\frac{b^3}{8a}}\right)}$
Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R_{\Delta ABC} = R$	$R = \dfrac{b^3 - 8a}{8\lvert a\rvert b}$
Tam giác ABC có độ dài cạnh $BC = m_0$	$am_0^2 + 2b = 0$
Tam giác ABC có độ dài $AB = AC = n_0$	$16a^2n_0^2 - b^4 + 8ab = 0$
Tam giác ABC có cực trị $B, C \in Ox$	$b^2 = 4ac$
Tam giác ABC có 3 góc nhọn	$b(8a + b^3) > 0$
Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2 = 6ac$
Tam giác ABC có trực tâm O	$b^3 + 8a - 4ac = 0$
Tam giác ABC cùng điểm O tạo thành hình thoi	$b^2 = 2ac$
Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3 - 8a - 4abc = 0$
Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3 - 8a - 8abc = 0$
Tam giác ABC có cạnh $BC = kAB = kAC$	$b^3.k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0$
Trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau	$b^2 = 4\sqrt{2}\lvert ac\rvert$
Tam giác ABC có điểm cực trị cách đều trục hoành	$b^2 = 8ac$
Đồ thị hàm số $(C): y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt lập thành cấp số cộng	$b^2 = \frac{100}{9}ac$
Định tham số để hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = ax^4 + bx^2 + c$ và trục hoành có diện tích phần trên và phần dưới bằng nhau.	$b^2 = \frac{36}{5}ac$
Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC: $x^2 + y^2 - \left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a} + c\right)y + c\left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right) = 0$	

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

I. Định nghĩa.

Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên tập D.

+ Số M gọi là ***giá trị lớn nhất*** của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \le M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$

Kí hiệu: $M = \max\limits_{x \in D} f(x)$.

+ Số m gọi là ***giá trị nhỏ nhất*** của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \ge m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$

Kí hiệu: $m = \min\limits_{x \in D} f(x)$.

2. Phương pháp tìm GTLN,GTNN

* Tìm GTLN, GTNN của hàm số bằng cách khảo sát trực tiếp

+ *Bước 1:* Tính $f'\left(x\right)$ và tìm các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D$ mà tại đó $f'\left(x\right) = 0$ hoặc hàm số không có đạo hàm.
+ *Bước 2:* Lập bảng biến thiên và rồi suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

* Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một đoạn

+ *Bước 1:*

 * Hàm số đã cho $y = f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$.

 * Tìm các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ trên khoảng $\left(a;b\right)$, tại đó $f'\left(x\right) = 0$ hoặc $f'\left(x\right)$

không xác định.

+ *Bước 2:* Tính $f\left(a\right), f\left(x_1\right), f\left(x_2\right), \ldots, f\left(x_n\right), f\left(b\right)$.
+ *Bước 3:* Khi đó:

 * $\max\limits_{\left[a,b\right]} f\left(x\right) = \max\left\{f\left(x_1\right), f\left(x_2\right), \ldots, f\left(x_n\right), f\left(a\right), f\left(b\right)\right\}$.

 * $\min\limits_{\left[a,b\right]} f\left(x\right) = \min\left\{f\left(x_1\right), f\left(x_2\right), \ldots, f\left(x_n\right), f\left(a\right), f\left(b\right)\right\}$.

* Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một khoảng

 * *Bước 1:* Tính đạo hàm $f'(x)$.

 * *Bước 2:* Tìm tất cả các nghiệm $x_i \in (a;b)$ của phương trình

$f'(x) = 0$ và tất cả các điểm $\alpha_i \in (a;b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.

 * *Bước 3.* Tính $A = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $B = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.

 * *Bước 4.* So sánh các giá trị tính được và kết luận $M = \max\limits_{(a;b)} f(x)$, $m = \min\limits_{(a;b)} f(x)$.

Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

+ Nếu $y = f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[a;b\right]$ thì $\begin{cases} \min\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right) = f\left(a\right) \\ \max\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right) = f\left(b\right) \end{cases}$.

+ Nếu $y = f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left[a;b\right]$ thì $\begin{cases} \min\limits_{\left[a;b\right]} f(x) = f\left(b\right) \\ \max\limits_{\left[a;b\right]} f(x) = f\left(a\right) \end{cases}$.

ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty),(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0, \lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$$

2. Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$$

Lưu ý: Với đồ thị hàm phân thức dạng $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0;\ ad - bc \neq 0)$ luôn có tiệm cận ngang là $y = \dfrac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$.

KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

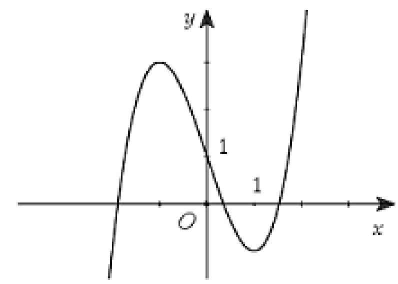
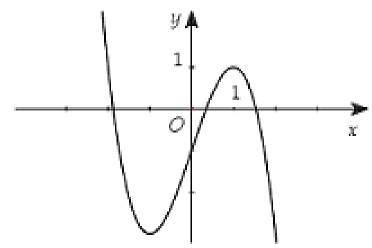
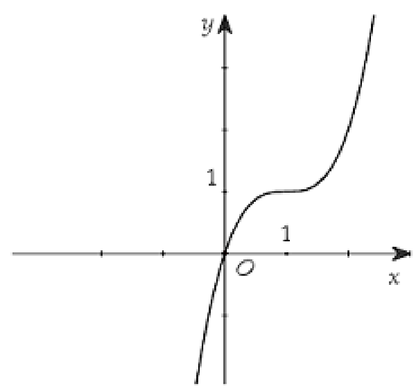
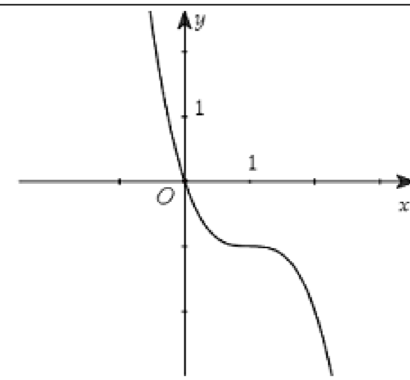
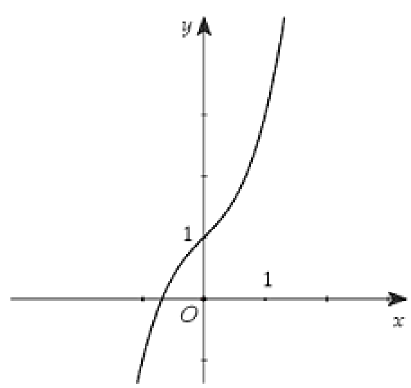
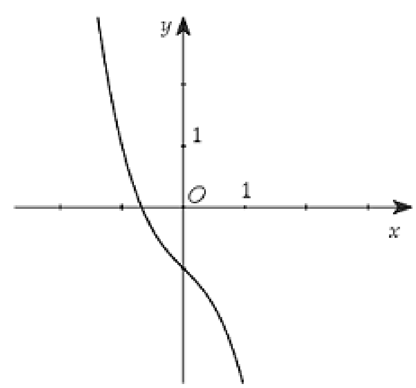
1. Sơ đồ khảo sát hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$.

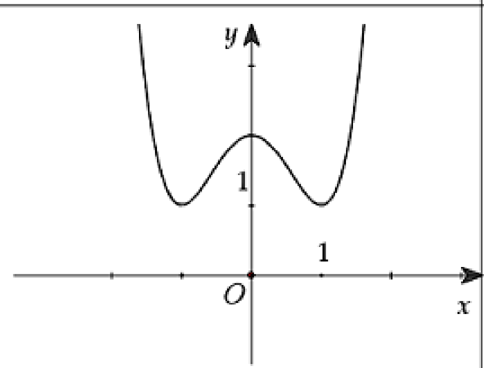
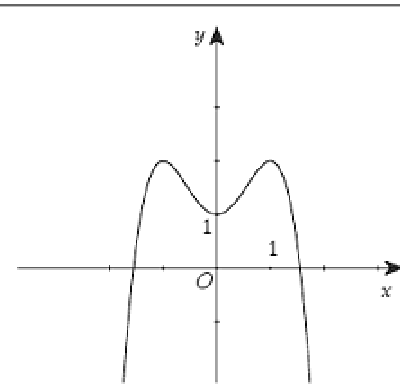
* **Tìm tập xác định của hàm số.**
* **Sự biến thiên**
  - Chiều biến thiên.
    i. Tính y'.
    ii. Tìm các nghiệm của phương trình $y' = 0$ và các điểm tại đó y' không xác định.
    iii. Xét dấu y' và suy ra các khoảng biến thiên của hàm số.
  - Tìm cực trị (*nếu có*).
  - Tìm các giới vô cực; các giới hạn tại $+\infty$, $-\infty$ và tại các điểm mà hàm số không xác định.
  - Tìm các đường tiệm cận của hàm số (*nếu có*).
  - Lập bảng biến thiên.
* **Đồ thị.**
  - Liệt kê các điểm đặc biệt (điểm cực đại, điểm cực tiểu, tâm đối xứng,...)
  - Xác định giao điểm của (C) với *Ox*, *Oy* (*nếu có*).
  - Vẽ đồ thị.

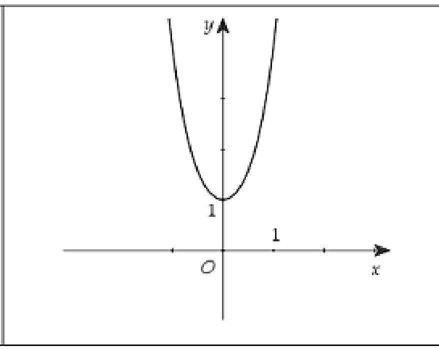
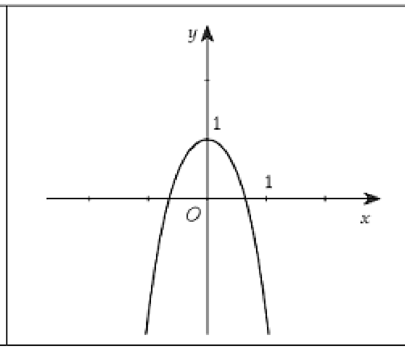
2. KHẢO SÁT MỘT SỐ HÀM ĐA THỨC VÀ PHÂN THỨC:

a) HÀM SỐ BẬC BA $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

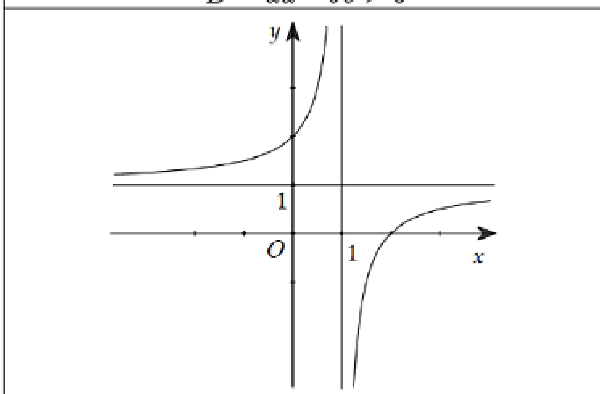
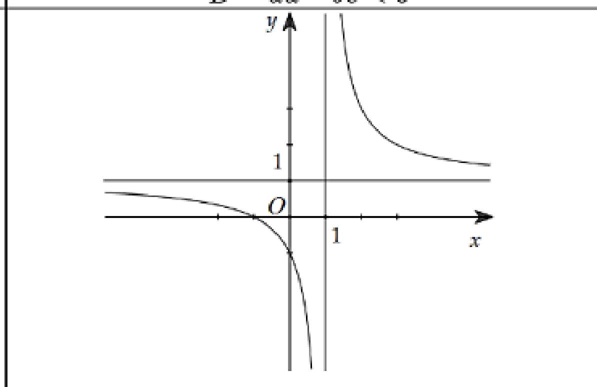
TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm		

b) HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG $y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$

TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt		

Phương trình $y' = 0$ *có 1 nghiệm.*		

c) HÀM SỐ NHẤT BIẾN $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(c \neq 0,\ ad - bc \neq 0\right)$

$D = ad - bc > 0$	$D = ad - bc < 0$
	

MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ

Dạng 1: Từ đồ thị $\left(C\right): y = f\left(x\right)$ suy ra đồ thị $\left(C'\right): y = f\left(\left|x\right|\right)$.

Ta có $y = f\left(\left|x\right|\right) = \begin{cases} f\left(x\right) & khi\ \ x \geq 0 \\ f\left(-x\right) & khi\ \ x < 0 \end{cases}$

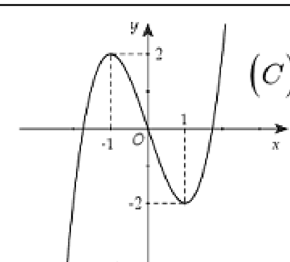
và $y = f\left(\left|x\right|\right)$ là *hàm chẵn* nên đồ thị $\left(C'\right)$ nhận Oy làm trục đối xứng.

*** Cách vẽ $\left(C'\right)$ từ $\left(C\right)$:**

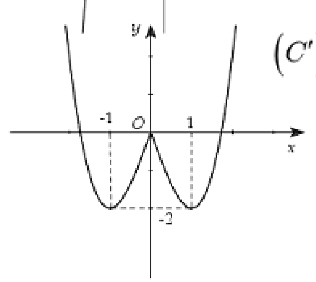
+ *Giữ nguyên* phần đồ thị bên phải Oy của đồ thị $\left(C\right): y = f\left(x\right)$.

+ *Bỏ* phần đồ thị bên trái Oy của $\left(C\right)$, **lấy đối xứng phần đồ thị** *được giữ* qua Oy.

Ví dụ: Từ đồ thị $\left(C\right): y = f\left(x\right) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $\left(C'\right): y = \left|x\right|^3 - 3\left|x\right|$.



$\left(C\right): y = x^3 - 3x$



$\left(C'\right): y = \left|x\right|^3 - 3\left|x\right|$

Biến đổi $\left(C\right)$:

+ Bỏ phần đồ thị của $\left(C\right)$ bên trái Oy, giữ nguyên $\left(C\right)$ bên phải Oy.

+ Lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy.

Dạng 2: Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |f(x)|$.

Nội dung: Ta có: $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & khi\ f(x) \geq 0 \\ -f(x) & khi\ f(x) < 0 \end{cases}$

*** Cách vẽ (C') từ (C):**

+ *Giữ nguyên* phần đồ thị phía trên Ox của đồ thị (C): $y = f(x)$.

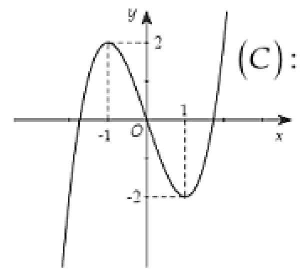
+ *Bỏ* phần đồ thị phía dưới Ox của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị *bị bỏ*** qua Ox.

Ví dụ: Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $y = |x^3 - 3x|$.

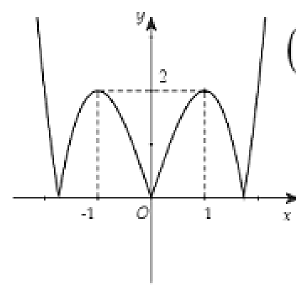
Biến đổi (C):

+ Bỏ phần đồ thị của (C) dưới Ox, giữ nguyên (C) phía trên Ox.

+ Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.



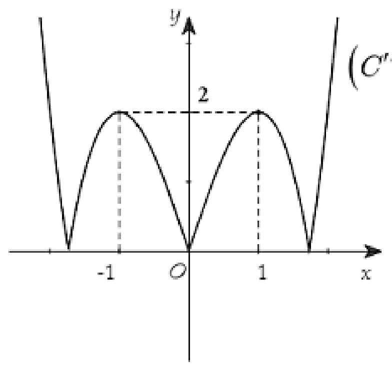
$(C): y = x^3 - 3x$



$(C'): y = |x^3 - 3x|$

Chú ý với dạng: $y = |f(|x|)|$ ta lần lượt biến đổi 2 đồ thị $y = f(|x|)$ và $y = |f(x)|$

Ví dụ: Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $y = \left||x|^3 - 3|x|\right|$. Biến đổi (C) để được đồ thị $(C'): y = |x|^3 - 3|x|$. Biến đổi $(C'): y = |x|^3 - 3|x|$ ta được đồ thị $(C''): y = \left||x|^3 - 3|x|\right|$.



$(C''): y = \left||x|^3 - 3|x|\right|$

Dạng 3: Từ đồ thị $(C): y = u(x).v(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |u(x)|.v(x)$.

Ta có: $y = |u(x)|.v(x) = \begin{cases} u(x).v(x) = f(x) & khi\ u(x) \geq 0 \\ -u(x).v(x) = f(x) & khi\ u(x) < 0 \end{cases}$

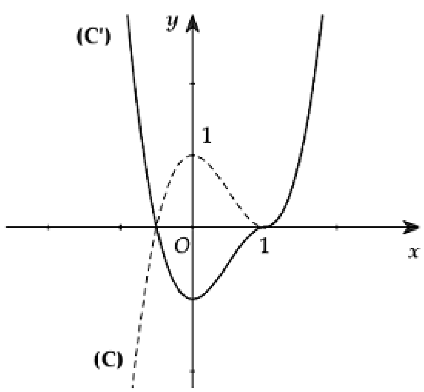
*** Cách vẽ (C') từ (C):**

+ *Giữ nguyên* phần đồ thị trên miền $u(x) \geq 0$ của đồ thị $(C): y = f(x)$.

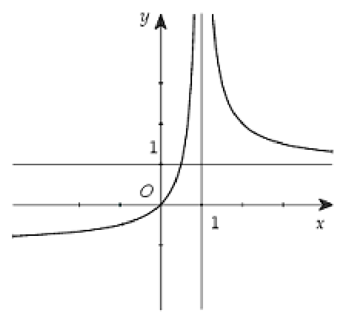
+ *Bỏ* phần đồ thị trên miền $u(x) < 0$ của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị *bị bỏ*** qua Ox.

Ví dụ

<table>
<tr>
<td>a) Từ đồ thị $(C): y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ suy ra đồ thị $(C'): y = |x-1|(2x^2 - x - 1)$</td>
<td>b) Từ đồ thị $(C): y = f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ suy ra đồ thị $(C'): y = \dfrac{x}{|x-1|}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$y = |x-1|(2x^2 - x - 1) = \begin{cases} f(x) & khi\ x \ge 1 \\ -f(x) & khi\ x < 1 \end{cases}$

<u>Đồ thị (C'):</u>
+ Giữ nguyên (C) với $x \ge 1$.
+ Bỏ (C) với $x < 1$. Lấy *đối xứng phần đồ thị bị bỏ* qua *Ox*.


<u>Nhận xét:</u> Trong quá trình thực hiện phép suy đồ thị nên *lấy đối xứng các điểm đặc biệt* của (C): giao điểm với *Ox, Oy*, CĐ, CT…</td>
<td>$y = \dfrac{x}{|x-1|} = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & khi\ x \in (1;+\infty) \\ -\dfrac{x}{x-1} & khi\ x \in (-\infty;1) \end{cases}$

<u>Đồ thị (C'):</u>
+ Bỏ phần đồ thị của (C) với $x < 1$, giữ nguyên (C) với $x > 1$.
+ Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.


<u>Nhận xét</u>: Đối với hàm phân thức thì nên *lấy đối xứng các đường tiệm cận* để thực hiện phép suy đồ thị một cách tương đối chính xác.</td>
</tr>
</table>

TIẾP TUYẾN

1. <u>Tiếp tuyến</u> : Cho hàm số $y = f(x)$, có đồ thị (C). **Tiếp tuyến** của đồ thị (C) tại điểm $M_0(x_0;y_0) \in (C)$ có dạng: $\boxed{y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0}$.

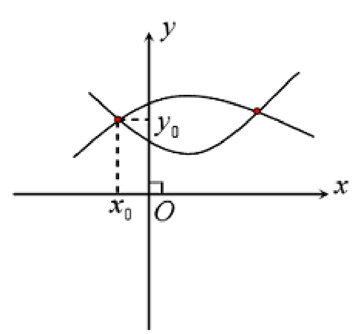
Trong đó: Điểm $M_0(x_0;y_0) \in (C)$ được gọi là *tiếp điểm*. (với $y_0 = f(x_0)$).

$k = f'(x_0)$ là ***hệ số góc*** của tiếp tuyến.

2. <u>Điều kiện tiếp xúc</u>: Cho hai hàm số $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$

Đồ thị (C) và (C') tiếp xúc nhau *khi chỉ khi* hệ phương trình: $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm.

TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ



Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và $y = g(x)$ có đồ thị (C_2). Phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là $f(x) = g(x)$ (1). Khi đó:

+ Số giao điểm của (C_1) và (C_2) bằng với số nghiệm của phương trình (1).

+ Nghiệm x_0 của phương trình (1) chính là hoành độ x_0 của giao điểm.

+ Để tính tung độ y_0 của giao điểm, ta thay hoành độ x_0 vào $y = f(x)$ hoặc $y = g(x)$.

+ Điểm $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của (C_1) và (C_2).

ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA HỌ ĐƯỜNG CONG

1. Bài toán tìm điểm cố định của họ đường cong

Xét họ đường cong (C_m) có phương trình $y = f(x, m)$, trong đó f là hàm đa thức theo biến x với m là tham số sao cho bậc của m không quá 2. Tìm những điểm cố định thuộc họ đường cong khi m thay đổi?

* **Phương pháp giải:**

+ *Bước 1:* Đưa phương trình $y = f(x, m)$ về dạng phương trình theo ẩn m có dạng sau: $Am + B = 0$ hoặc $Am^2 + Bm + C = 0$.

+ *Bước 2:* Cho các hệ số bằng 0, ta thu được hệ phương trình và giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}.$$

+ *Bước 3:* Kết luận:

- Nếu hệ vô nghiệm thì họ đường cong (C_m) không có điểm cố định.
- Nếu hệ có nghiệm thì nghiệm đó là điểm cố định của (C_m).

2. Bài toán tìm điểm có tọa độ nguyên:

Cho đường cong (C) có phương trình $y = f(x)$ (hàm phân thức). Hãy tìm những điểm có tọa độ nguyên của đường cong?

Những điểm có tọa độ nguyên là những điểm sao cho cả hoành độ và tung độ của điểm đó đều là số nguyên.

* **Phương pháp giải:**

+ *Bước 1:* Thực hiện phép chia đa thức chia tử số cho mẫu số.

+ *Bước 2:* Lập luận để giải bài toán.

3. Bài toán tìm điểm có tính chất đối xứng:

Cho đường cong (C) có phương trình $y = f(x)$. Tìm những điểm đối xứng nhau qua một điểm, qua đường thẳng.

Bài toán 1: *Cho đồ thị $(C): y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ trên đồ thị (C) tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua điểm $I(x_I, y_I)$.*

* **Phương pháp giải:**

+ Gọi $M\left(a; Aa^3 + Ba^2 + Ca + D\right)$, $N\left(b; Ab^3 + Bb^2 + Cb + D\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua điểm I.

+ Ta có $\begin{cases} a+b=2x_I \\ A(a^3+b^3)+B\left(a^2+b^2\right)+C\left(a+b\right)+2D=2y_I \end{cases}$.

Giải hệ phương trình tìm được a,b từ đó tìm được toạ độ M, N.

Trường hợp đặc biệt : *Cho đồ thị $\left(C\right): y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$. Trên đồ thị $\left(C\right)$ tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ.*

* **Phương pháp giải:**

+ Gọi $M\left(a, Aa^3+Ba^2+Ca+D\right), N\left(b, Ab^3+Bb^2+Cb+D\right)$ là hai điểm trên $\left(C\right)$ đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

+ Ta có $\begin{cases} a+b=0 \\ A(a^3+b^3)+B\left(a^2+b^2\right)+C\left(a+b\right)+2D=0 \end{cases}$.

+ Giải hệ phương trình tìm được a,b từ đó tìm được toạ độ M,N.

Bài toán 3: *Cho đồ thị $\left(C\right): y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ trên đồ thị $\left(C\right)$ tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y=A_1x+B_1$.*

* **Phương pháp giải:**

+ Gọi $M\left(a;Aa^3+Ba^2+Ca+D\right), N\left(b;Ab^3+Bb^2+Cb+D\right)$ là hai điểm trên $\left(C\right)$ đối xứng nhau qua đường thẳng d.

+ Ta có: $\begin{cases} I\in d & (1) \\ \overrightarrow{MN}.\vec{u_d}=0 & (2) \end{cases}$ (với I là trung điểm của MN và $\vec{u_d}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d). Giải hệ phương trình tìm được M, N.

4. Bài toán tìm điểm đặc biệt, khoảng cách

❖ Lý thuyết:

+ Cho hai điểm $A\left(x_1;y_1\right);B\left(x_2;y_2\right) \Rightarrow AB=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$

Cho điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ và đường thẳng $d: Ax+By+C=0$, thì khoảng cách từ M đến d là $h\left(M;d\right)=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

+ Cho hàm phân thức: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ tiếp tuyến tại M cắt *TCĐ, TCN* ở A và B thì M là trung điểm của AB.

Diện tích tam giác IAB không đổi: $S_{IAB}=\dfrac{2}{c^2}\left|ad-bc\right|$.

❖ Các bài toán thường gặp:

Bài toán 1: *Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$. Hãy tìm trên (C) hai điểm A và B thuộc hai nhánh đồ thị hàm số sao cho khoảng cách AB ngắn nhất.*

* **Phương pháp giải:**

+ $\left(C\right)$ có tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$ do tính chất của hàm phân thức, đồ thị nằm về hai phía của tiệm cận đứng. Nên gọi hai số α,β là hai số dương.

\+ Nếu A thuộc nhánh trái: $x_A < -\frac{d}{c} \Rightarrow x_A = -\frac{d}{c} - \alpha < -\frac{d}{c}$; $y_A = f(x_A)$.

\+ Nếu B thuộc nhánh phải: $x_B > -\frac{d}{c} \Rightarrow x_B = -\frac{d}{c} + \beta > -\frac{d}{c}$; $y_B = f(x_B)$.

\+ Sau đó tính: $AB^2 = \left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 = \left[\left(a+\beta\right) - \left(a - \alpha\right)\right]^2 + \left(y_B - y_A\right)^2$.

\+ Áp dụng bất đẳng thức Cauchy sẽ tìm ra kết quả.

Bài toán 2: *Cho đồ thị hàm số $\left(C\right)$ có phương trình $y = f(x)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) để tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ nhỏ nhất.*

* **Phương pháp giải:**

\+ Gọi $M\left(x;y\right)$ và tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là d thì $d = \left|x\right| + \left|y\right|$.

\+ Xét các khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ khi M nằm ở các vị trí đặc biệt: Trên trục hoành, trên trục tung.

\+ Sau đó xét tổng quát, những điểm M có hoành độ, hoặc tung độ lớn hơn hoành độ hoặc tung độ của M khi nằm trên hai trục thì loại đi không xét đến.

\+ Những điểm còn lại ta đưa về tìm giá trị nhỏ nhất của đồ thi hàm số dựa vào đạo hàm rồi tìm được giá trị nhỏ nhất của d.

Bài toán 3: *Cho đồ thị (C) có phương trình $y = f(x)$. Tìm điểm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến Ox bằng k lần khoảng cách từ M đến trục Oy.*

* **Phương pháp giải:**

Theo đầu bài ta có $\left|y\right| = k\left|x\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = kx \\ y = -kx \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right) = kx \\ f\left(x\right) = -kx \end{array}\right.$.

Bài toán 4: *Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ $\left(c \neq 0,\ ad - bc \neq 0\right)$. Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho độ dài MI ngắn nhất (với I là giao điểm hai tiệm cận).*

* **Phương pháp giải:**

\+ Tiệm cận đứng $x = \frac{-d}{c}$; tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.

\+ Ta tìm được tọa độ giao điểm $I\left(\frac{-d}{c};\frac{a}{c}\right)$ của hai tiệm cận.

\+ Gọi $M\left(x_M;y_M\right)$ là điểm cần tìm. Khi đó: $IM^2 = \left(x_M + \frac{d}{c}\right)^2 + \left(y_M - \frac{a}{c}\right)^2 = g\left(x_M\right)$

\+ Sử dụng phương pháp tìm GTLN - GTNN cho hàm số g để thu được kết quả.

Bài toán 5: *Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y = f(x)$ và đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$. Tìm điểm I trên (C) sao cho khoảng cách từ I đến d là ngắn nhất.*

* **Phương pháp giải:**

\+ Gọi I thuộc $(C) \Rightarrow I\left(x_0;y_0\right)$; $y_0 = f(x_0)$.

\+ Khoảng cách từ I đến d là $g(x_0) = h\left(I;d\right) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

\+ Khảo sát hàm số $y = g(x)$ để tìm ra điểm I thỏa mãn yêu cầu.

PHẦN II. MŨ VÀ LOGARIT

LŨY THỪA VÀ HÀM SỐ LŨY THỪA.

1. KHÁI NIỆM LŨY THỪA.

+ *Lũy thừa với số mũ nguyên.*

Cho n là một số nguyên dương.

Với a là số thực tùy ý, lũy thừa bậc n của a là tích của n thừa số a.

$$a^n = \underbrace{a.a.\ldots\ldots a}_{n} \ (n \text{ thừa số}).$$

Với $a \neq 0$.

$$a^0 = 1 \qquad\qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ta gọi a là cơ số, m là mũ số. Và chú ý 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa.

+ Một số tính chất của lũy thừa

- Giả thuyết rằng mỗi biểu thức được xét đều có nghĩa:

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta};\ \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta};\ (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha.\beta};\ (ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha};\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-\alpha} = \left(\frac{b}{a}\right)^\alpha.$$

- Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$;

  Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

- Với mọi $0 < a < b$, ta có: $a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0$; $\quad a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$
- Chú ý:

  + Các tính chất trên đúng trong trường hợp số mũ nguyên hoặc không nguyên.

  + Khi xét lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số a phải khác 0.

  + Khi xét lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số a phải dương.

+ *Phương trình* $x^n = b$.

Ta có kết quả biện luận số nghiệm của phương trình $x^n = b$ như sau:

- Trường hợp n lẻ:

Với mọi số thực b, phương trình có nghiệm duy nhất.

- Trường hợp n chẵn:

  + Với $b < 0$, phương trình vô nghiệm.

  + Với $b = 0$, phương trình có một nghiệm $x = 0$.

  + Với $b > 0$, phương trình có hai nghiệm trái dấu, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{b}$, còn giá trị âm là $-\sqrt[n]{b}$.

Một số tính chất của căn bậc n

Với $a, b \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

+ $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, \forall a$;

+ $\sqrt[2n]{ab} = \sqrt[2n]{|a|} \cdot \sqrt[2n]{|b|}, \forall ab \geq 0$;

+ $\sqrt[2n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2n]{|a|}}{\sqrt[2n]{|b|}}, \forall ab \geq 0, b \neq 0$;

+ $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a, \forall a$.

+ $\sqrt[2n+1]{ab} = \sqrt[2n+1]{a} \cdot \sqrt[2n+1]{b}, \forall a, b$.

+ $\sqrt[2n+1]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2n+1]{a}}{\sqrt[2n+1]{b}}, \forall a, \forall b \neq 0$.

+ $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, \forall a > 0$, n nguyên dương, m nguyên.

+ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \forall a \geq 0$, n, m nguyên dương.

+ Nếu $\frac{p}{n} = \frac{q}{m}$ thì $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}, \forall a > 0, m, n$ nguyên dương p, q nguyên.

Đặc biệt: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[m.n]{a^m}$.

2. HÀM SỐ LŨY THỪA.

+ *Khái niệm.*

Xét hàm số $y = x^\alpha$, với α là số thực cho trước.

Hàm số $y = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là hàm số lũy thừa.

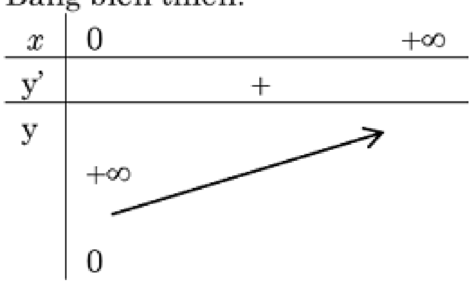
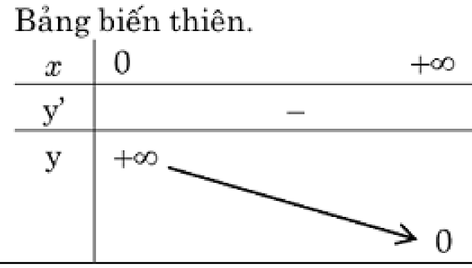
Chú ý.

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ tùy thuộc vào giá trị của α. Cụ thể.

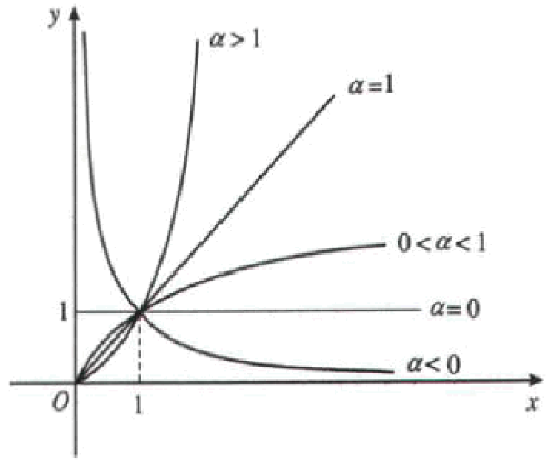
- Với α nguyên dương, tập xác định là $\mathbb{R}$.
- Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
- Với α không nguyên, tập xác định $(0;+\infty)$.

+ *Khảo sát hàm số lũy thừa.*

❖ Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn chứa khoảng $(0;+\infty)$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Trong trường hợp tổng quát, ta khảo sát hàm số $y = x^\alpha$ trên khoảng này.

$y = x^\alpha, \alpha > 0.$	$y = x^\alpha, \alpha < 0.$
1. Tập xác định: $(0;+\infty)$. 2. Sự biến thiên $y' = \alpha.x^{\alpha-1} > 0 \quad \forall x > 0.$ Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty.$ Tiệm cận: không có. 3. Bảng biến thiên. 	1. Tập xác định: $(0;+\infty)$. 2. Sự biến thiên $y' = \alpha.x^{\alpha-1} < 0 \quad \forall x > 0.$ Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0.$ Tiệm cận: Ox là tiệm cận ngang. Oy là tiệm cận đứng. 3. Bảng biến thiên. 

Đồ thị của hàm số.



Đồ thị của hàm số lũy thừa $y=x^{\alpha}$ luôn đi qua điểm $I(1;1)$.

❖ Khảo sát hàm số mũ $y=a^x$, $(a>0,a\neq 1)$.

$y=a^x,(a>1)$

1. Tập xác định: $\mathbb{R}$.
2. Sự biến thiên.

   $y'=a^x\ln a>0,\forall x.$

   Giới hạn đặc biệt:

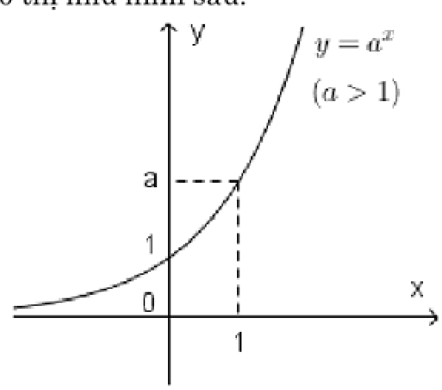
   $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0,\quad \lim\limits_{x\to+\infty} a=+\infty.$

   Tiệm cận:

   Ox là tiệm cận ngang.
3. Bảng biến thiên.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+	+	+	
y	0	1	a	$+\infty$

Đồ thị như hình sau.



$y=a^x,(a<1)$

1. Tập xác định: $\mathbb{R}$.
2. Sự biến thiên.

   $y'=a^x\ln a<0,\forall x$

   Giới hạn đặc biệt:

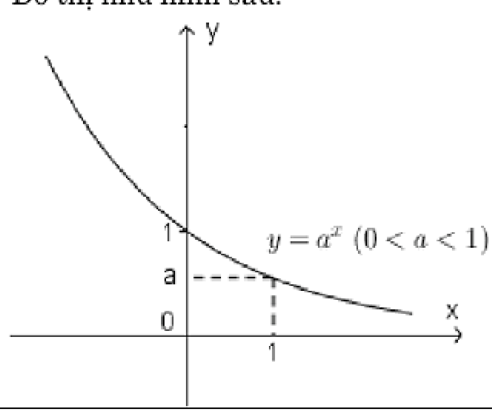
   $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0.$

   Tiệm cận:

   Ox là tiệm cận ngang.
3. Bảng biến thiên.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	–	–	–	
y	$+\infty$	1	a	0

Đồ thị như hình sau.



LOGARIT VÀ HÀM SỐ LOGARIT

1. KHÁI NIỆM –TÍNH CHẤT VÀ QUY TẮT TÍNH LOGARIT.

+ *Khái niệm Logarit.*

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^{\alpha} = b$ được gọi là logarit cơ số a của b và được kí hiệu là $\log_a b$.

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^{\alpha} = b.$$

Không có logarit của số âm và số 0.

Bảng tóm tắt công thức Mũ-loarrit thường gặp:

• $a^0 = 1, (a \neq 0)$.	• $\log_a 1 = 0, (0 < a \neq 1)$
• $(a)^1 = a$	• $\log_a a = 1, (0 < a \neq 1)$
• $(a)^{-\alpha} = \dfrac{1}{a^{\alpha}}$	• $\log_a a^{\alpha} = \alpha, (0 < a \neq 1)$
• $\dfrac{(a)^{\alpha}}{(a)^{\beta}} = (a)^{\alpha-\beta}$	• $\log_{a^{\alpha}} a = \dfrac{1}{\alpha}, (0 < a \neq 1)$
• $(a)^{\alpha}.(b)^{\beta} = (a)^{\alpha+\beta}$	• $\log_a b^{\alpha} = \alpha.\log_a b, (a, b > 0, a \neq 1)$
• $(a)^{\alpha}.(b)^{\alpha} = (a.b)^{\alpha}$	• $\log_{a^{\beta}} b = \dfrac{1}{\beta}.\log_a b$
• $\dfrac{(a)^{\alpha}}{(b)^{\alpha}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha}, (b \neq 0)$	• $\log_{a^{\beta}} b^{\alpha} = \dfrac{\alpha}{\beta}.\log_a b$
• $(a)^{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt[\beta]{(a)^{\alpha}}, (\beta \in \mathbb{N}^*)$	• $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$
• $(a^{\alpha})^{\beta} = (a)^{\alpha\beta}$	• $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\dfrac{b}{c}\right)$
• $(a)^{\alpha} = b \Rightarrow \alpha = \log_a b$	• $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT.

+ *Bất phương trình mũ cơ bản.*

Bất phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b, a^x < b, a^x \leq b$) với $a > 0, a \neq 1$.

Ta xét bất phương trình có dạng $a^x > b$.

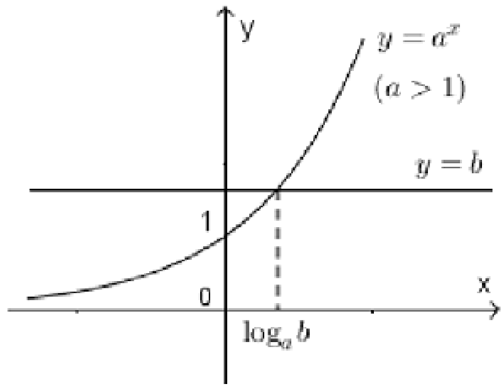
- Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$, vì $a^x > b, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.

Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$.

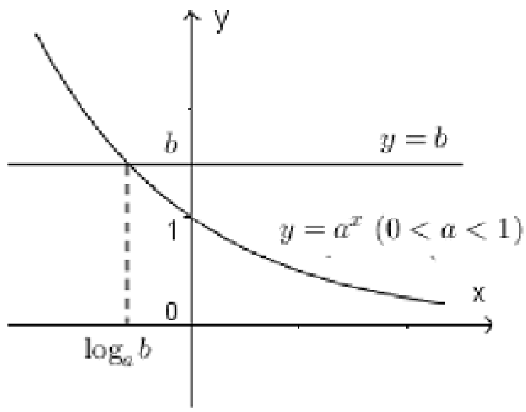
Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

Ta minh họa bằng đồ thị sau:

• Với $a > 1$, ta có đồ thị



• Với $0 < a < 1$, ta có đồ thị



+ *Bất phương trình logarit cơ bản.*

Bất phương trình logarit cơ bản có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \geq b, \log_a x < b, \log_a x \leq b$) với $a > 0, a \neq 1$.

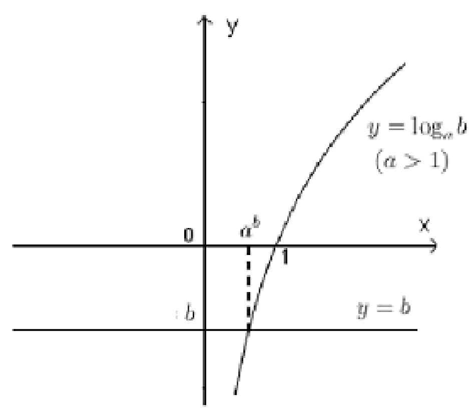
Xét bất phương trình $\log_a x > b$.

• Trường hợp $a > 1$, ta có: $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$.

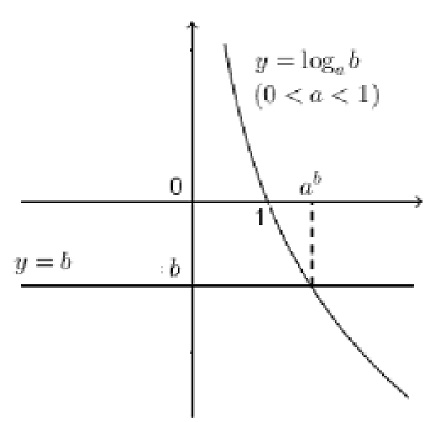
• Trường hợp $0 < a < 1$, ta có: $\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$.

Ta minh họa bằng đồ thị như sau.

• Với $a > 1$, ta có đồ thị sau.



• Với $0 < a < 1$, ta có đồ thị sau.



Quan sát đồ thị, ta thấy rằng:

• Trường hợp $a > 1$: $\log_a x > b$ khi và chỉ khi $x > a^b$.

• Trường hợp $0 < a < 1$: $\log_a x > b$ khi và chỉ khi $0 < x < a^b$.

BÀI TOÁN LÃI SUẤT NGÂN HÀNG

1. Lãi đơn: là số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra, tức là tiền lãi của kì hạn trước không được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn kế tiếp, cho dù đến kì hạn người gửi không đến gửi tiền ra.

a) Công thức tính: Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi đơn $r\%$ /kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là:

$$\boxed{S_n = A + nAr = A(1+nr)}$$

2. Lãi kép: tiền lãi của kì hạn trước nếu người gửi không rút ra thì được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn sau.

a) Công thức tính: Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép $r\%$ /kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là:

$$\boxed{S_n = A(1+r)^n} \Rightarrow \boxed{n = \log_{(1+r)}\left(\frac{S_n}{A}\right)},\quad \boxed{r\% = \sqrt[n]{\frac{S_n}{A}} - 1},\quad \boxed{A = \frac{S_n}{(1+r)^n}}$$

3. Tiền gửi hàng tháng: Mỗi tháng gửi đúng cùng một số tiền vào 1 thời gian cố định.

a) Công thức tính: Đầu mỗi tháng khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền A đồng với lãi kép $r\%$/tháng thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n tháng ($n \in \mathbb{N}^*$) (nhận tiền cuối tháng, khi ngân hàng đã tính lãi) là S_n.

$$\boxed{S_n = \frac{A}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r)} \Rightarrow \boxed{n = \log_{(1+r)}\left(\frac{S_n.r}{A(1+r)} + 1\right)},\quad \boxed{A = \frac{S_n.r}{(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}}$$

4. Gửi ngân hàng và rút tiền gửi hàng tháng:

a) Công thức tính: Gửi ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất $r\%$/tháng. Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, rút ra số tiền là X đồng. Tính số tiền còn lại sau n tháng là bao nhiêu?

$$\boxed{S_n = A(1+r)^n - X\frac{(1+r)^n - 1}{r}} \Rightarrow \boxed{X = \left[A(1+r)^n - S_n\right]\frac{r}{(1+r)^n - 1}}$$

5. Vay vốn trả góp: Vay ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất $r\%$/tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi hoàn nợ số tiền là X đồng và trả hết tiền nợ sau đúng n tháng.

a) Công thức tính: Cách tính số tiền còn lại sau n tháng giống hoàn toàn công thức tính gửi ngân hàng và rút tiền hàng tháng nên ta có

$$S_n = A(1+r)^n - X\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Để sau đúng n tháng trả hết nợ thì $S_n = 0$ nên

$$A(1+r)^n - X\frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0$$

$$X = \frac{A(1+r)^n .r}{(1+r)^n - 1}$$

6. Bài toán tăng lương: Một người được lãnh lương khởi điểm là A đồng/tháng. Cứ sau n tháng thì lương người đó được tăng thêm $r\%$/tháng. Hỏi sau kn tháng người đó lĩnh được tất cả là bao nhiêu tiền?

Công thức tính: Tổng số tiền nhận được sau kn tháng là $S_{kn} = Ak\frac{(1+r)^k - 1}{r}$

7. Bài toán tăng trưởng dân số:

Công thức tính tăng trưởng dân số

$$X_m = X_n(1+r)^{m-n}, \left(m, n \in \mathbb{Z}^+, m \geq n\right)$$

Trong đó:

$r\%$ là tỉ lệ tăng dân số từ năm n đến năm m

X_m dân số năm m

X_n dân số năm n

Từ đó ta có công thức tính tỉ lệ tăng dân số là $r\% = \sqrt[m-n]{\frac{X_m}{X_n}} - 1$

8. Lãi kép liên tục:

Gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép $r\%$/năm thì số tiền nhận được cả vốn lẫn lãi sau n năm $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ là: $S_n = A(1+r)^n$. Giả sử ta chia mỗi năm thành m kì hạn để tính lãi và lãi suất mỗi kì hạn là $\frac{r}{m}\%$ thì số tiền thu được sau n năm là:

$$S_n = A\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m.n}$$

Khi tăng số kì hạn của mỗi năm lên vô cực, tức là $m \to +\infty$, gọi là hình thức lãi kép tiên tục thì người ta chứng minh được số tiền nhận được cả gốc lẫn lãi là:

$S = Ae^{n.r}$ (công thức tăng trưởng mũ)

PHẦN III.
NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

I. NGUYÊN HÀM

1. Nguyên hàm

Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$. Kí hiệu: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Định lí:

1) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

2) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.

Do đó $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

2. Tính chất của nguyên hàm

- $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ và $\int f'(x)dx = f(x) + C$; $d\left(\int f(x)\mathrm{dx}\right) = f(x)\mathrm{dx}$
- Nếu F(x) có đạo hàm thì: $\int d\left(F(x)\right) = F(x) + C$
- $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ với k là hằng số khác 0.
- $\int \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- **Công thức đổi biến số:** Cho $y = f(u)$ và $u = g(x)$.

Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f\left(g(x)\right)g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C$

3. Sự tồn tại của nguyên hàm

Định lí: Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

Bảng nguyên hàm các hàm số thường gặp

1. $\int 0dx = C$ 2. $\int dx = x + C$	
3. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C\left(\alpha \ne -1\right)$	16. $\int (ax+b)^\alpha \mathrm{dx} = \frac{1}{a}\left(\frac{ax+b}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1} + c, \alpha \ne -1$
4. $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$	17. $\int \frac{3x^2 - \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x}dx$
5. $\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + C$	18. $\int \frac{\mathrm{dx}}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\|ax+b\| + c$
6. $\int e^x dx = e^x + C$	19. $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	20. $\int a^{kx+b}dx = \frac{1}{k}\frac{a^{kx+b}}{\ln a} + C$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$	21. $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	22. $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
10. $\int \tan x.dx = -\ln\|\cos x\| + C$	23. $\int \tan(ax+b)\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\ln\|\cos(ax+b)\| + c$
11. $\int \cot x.dx = \ln\|\sin x\| + C$	24. $\int \mathrm{cotg}(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\|\sin(ax+b)\| + c$
12. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$	25. $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
13. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$	26. $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$
14. $\int (1+\tan^2 x)dx = \tan x + C$	27. $\int (1+\tan^2(ax+b))dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
15. $\int (1+\cot^2 x)dx = -\cot x + C$	28. $\int (1+\cot^2(ax+b))dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$

Bảng nguyên hàm mở rộng

$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + c$	$\int \arcsin\frac{x}{a}\mathrm{d}x = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + c$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + c$	$\int \arccos\frac{x}{a}\mathrm{d}x = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + c$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c$	$\int \arctan\frac{x}{a}\mathrm{d}x = x\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2) + c$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\|a\|} + c$	$\int \mathrm{arccot}\frac{x}{a}\mathrm{d}x = x\,\mathrm{arccot}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2) + c$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\left\|\frac{x}{a}\right\| + c$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a}\ln\left\|\mathrm{tg}\frac{ax+b}{2}\right\| + c$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left\|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right\| + c$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a}\ln\left\|\tan\frac{ax+b}{2}\right\| + c$
$\int \ln(ax+b)\mathrm{d}x = \left(x+\frac{b}{a}\right)\ln(ax+b) - x + c$	$\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + c$
$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + c$	$\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + c$

CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

1. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

a. Đổi biến dạng 1:

Nếu : $\int f(x) = F(x) + C$ và với $u = \varphi(t)$ là hàm số có đạo hàm thì : $\int f(u)du = F(u) + C$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

- Bước 1: Chọn $x = \varphi(t)$, trong đó $\varphi(t)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp .
- Bước 2: Lấy vi phân hai vế : $dx = \varphi'(t)dt$
- Bước 3: Biến đổi : $f(x)dx = f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt = g(t)dt$
- Bước 4: Khi đó tính : $\int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C$.

* Các dấu hiệu đổi biến thường gặp :

Dấu hiệu	Cách chọn
$\sqrt{a^2 - x^2}$	Đặt $x = \|a\| sint$; với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. hoặc $x = \|a\| cost$; với $t \in \left[0; \pi\right]$.
$\sqrt{x^2 - a^2}$	Đặt $x = \frac{\|a\|}{sint}$; với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \backslash \{0\}$ hoặc $x = \frac{\|a\|}{cost}$ với $t \in \left[0; \pi\right] \backslash \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
$\sqrt{a^2 + x^2}$	Đặt $x = \|a\| tant$; với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. hoặc $x = \|a\| \cot t$ với $t \in (0; \pi)$.
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	Đặt $x = acos2t$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	Đặt $x = a + (b-a)sin^2 t$
$\frac{1}{a^2 + x^2}$	Đặt $x = atant$; với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

b. Đổi biến dạng 2:

Nếu hàm số f(x) liên tục thì đặt $x = \varphi(t)$. Trong đó $\varphi(t)$ cùng với đạo hàm của nó ($\varphi'(t)$ là những hàm số liên tục) thì ta được :

$$\int f(x)dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt = \int g(t)dt = G(t) + C.$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG.

- Bước 1: Chọn t=$\varphi(x)$. Trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp .
- Bước 2: Tính vi phân hai vế : $dt=\varphi'(t)dt$.
- Bước 3: Biểu thị : $f(x)dx=f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt=g(t)dt$.
- Bước 4: Khi đó : $I=\int f(x)dx=\int g(t)dt=G(t)+C$

* Các dấu hiệu đổi biến thường gặp :

Dấu hiệu	Cách chọn
Hàm số mẫu số có	t là mẫu số
Hàm số : $f\left(x;\sqrt{\varphi(x)}\right)$	$t=\sqrt{\varphi(x)}$
Hàm $f(x)=\dfrac{a.\sin x+b.\cos x}{c.\sin x+d.\cos x+c}$	$t=\tan\dfrac{x}{2};\left(\cos\dfrac{x}{2}\neq 0\right)$
Hàm $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$	Với : $x+a>0$ và $x+b>0$. Đặt : $t=\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}$ Với $x+a<0$ và $x+b<0$. Đặt : $t=\sqrt{x-a}+\sqrt{-x-b}$

2. NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Nếu u(x) , v(x) là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K:

$$\int u(x).v'(x)dx=u(x).v(x)-\int v(x).u'(x)dx$$

Hay $\int udv=uv-\int vdu$ (với $du=u'(x)dx,\ dv=v'(x)dx$)

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

- Bước 1: Ta biến đổi tích phân ban đầu về dạng :
$$I=\int f(x)dx=\int f_1(x).f_2(x)dx$$
- Bước 2: Đặt : $\begin{cases}u=f_1(x)\\ dv=f_2(x)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}du=f'_1(x)dx\\ v=\int f_2(x)dx\end{cases}$
- Bước 3: Khi đó : $\int u.dv=u.v-\int v.du$

<u>Dạng I:</u> $I=\int P(x)\left\{\begin{matrix}\sin x\\ \cos x\\ e^x\end{matrix}\right\}.dx$

Đặt $\begin{cases}u=P(x)\\ dv=\left\{\begin{matrix}\sin x\\ \cos x\\ e^x\end{matrix}\right\}.dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'.du=P'(x)dx\\ v=\left\{\begin{matrix}-\cos x\\ \sin x\\ e^x\end{matrix}\right\}\end{cases}$ Vậy $I=P(x)\left\{\begin{matrix}-\cos x\\ \sin x\\ e^x\end{matrix}\right\}-\int\left\{\begin{matrix}-\cos x\\ \sin x\\ e^x\end{matrix}\right\}.P'(x)dx$

Dạng II: $I = \int P(x).\ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = P(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \int P(x)dx = Q(x) \end{cases}$ Vậy $I = \ln x.Q(x) - \int Q(x).\frac{1}{x}dx$

Dạng III $I = \int e^x \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix} dx$

Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} \end{cases}$ Vậy $I = e^x \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} - \int \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} e^x dx$

Bằng phương pháp tương tự ta tính được $\int \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} e^x dx$ sau đó thay vào I

TÍCH PHÂN

1. Công thức tính tích phân

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

** Nhận xét*: Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)dx$ hay $\int_a^b f(t)dt$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

2. Tính chất của tích phân

Giả sử cho hai hàm số f(x) và g(x) liên tục trên K , a,b,c là ba số bất kỳ thuộc K. Khi đó ta có :

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
4. $\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
5. $\int_a^b kf(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$.
6. Nếu f(x) $\geq 0 \forall x \in \left[a;b\right]$ thì : $\int_a^b f(x)dx \geq 0 \forall x \in \left[a;b\right]$
7. Nếu $\forall x \in \left[a;b\right]: f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$. (Bất đẳng thức trong tích phân)
8. Nếu $\forall x \in \left[a;b\right]$ Nếu $M \leq f(x) \leq N$ thì $M\left(b-a\right) \leq \int_a^b f(x)dx \leq N\left(b-a\right)$.

PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

I. ĐỔI BIẾN

a. Phương pháp đổi biến số dạng 1.

Định lí . Nếu 1) Hàm $x = u(t)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[\alpha;\ \beta\right]$,

2) Hàm hợp $f(u(t))$ được xác định trên $\left[\alpha;\ \beta\right]$,

3) $u(\alpha) = a,\ u(\beta) = b$,

Khi đó: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

- *Bước 1:* Đặt $x = u\left(t\right)$
- *Bước 2:* Tính vi phân hai vế : $x = u(t) \Rightarrow dx = u'(t)dt$ Đổi cận: $\begin{vmatrix} x = b \\ x = a \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} t = \beta \\ t = \alpha \end{vmatrix}$
- *Bước 3:* Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo biến t

Vậy: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left[u(t)\right]u'(t)dt = \int_\alpha^\beta g(t)dt = G(t)\Big|_\alpha^\beta = G(\beta) - G(\alpha)$

b. Phương pháp đổi biến dạng 2

Định lí: Nếu hàm số $u = u(x)$ đơn điệu và có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ sao cho $f(x)dx = g\left(u(x)\right)u'(x)dx = g(u)du$ thì: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

- **Bước 1:** Đặt $u = u(x) \Rightarrow du = u'(x)dx$
- **Bước 2**: Đổi cận : $\begin{vmatrix} x = b \\ x = a \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} u = u(b) \\ u = u(a) \end{vmatrix}$
- **Bước 3**: Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo biến u

Vậy: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g\left[u(x)\right].u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du$

II. TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Định lí . Nếu u(x) và v(x) là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $\left[a;b\right]$ thì:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx \quad \text{Hay} \quad \int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

- **Bước 1:** Viết f(x)dx dưới dạng $udv = uv'dx$ bằng cách chọn một phần thích hợp của f(x) làm u(x) và phần còn lại $dv = v'(x)dx$
- **Bước 2:** Tính $du = u'dx$ và $v = \int dv = \int v'(x)dx$
- **Bước 3:** Tính $\int_a^b vu'(x)dx$ và $uv\Big|_a^b$

***Cách đặt u và dv trong phương pháp tích phân từng phần.**

Đặt u theo thứ tự ưu tiên: ***Lốc-đa-mũ-lượng***	$\int_a^b P(x)e^x dx$	$\int_a^b P(x)\ln x dx$	$\int_a^b P(x)\cos x dx$	$\int_a^b e^x \cos x dx$
u	*P(x)*	*lnx*	*P(x)*	e^x
dv	$e^x dx$	*P(x)dx*	*cosxdx*	*cosxdx*

Chú ý: Nên chọn u là phần của f(x) mà khi lấy đạo hàm thì đơn giản, chọn $dv = v'dx$ là phần của f(x)dx là vi phân một hàm số đã biết hoặc có nguyên hàm dễ tìm.

TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN

1. Tích phân hàm hữu tỉ

Dạng 1: $I = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int_\alpha^\beta \frac{adx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b|\Big|_\alpha^\beta$. (với a≠0)

Chú ý: Nếu $I = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{(ax+b)^k} = \frac{1}{a}\int_\alpha^\beta (ax+b)^{-k}.adx = \frac{1}{a(1-k)}.(ax+b)^{-k+1}\Big|_\alpha^\beta$

Dạng 2: $I = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ $(a \neq 0)$ ($ax^2+bx+c \neq 0$ với mọi $x \in [\alpha;\beta]$)

Xét $\Delta = b^2 - 4ac$.

+ Nếu $\Delta > 0$: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{a(x_1-x_2)}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right)$ thì :

$$I = \frac{1}{a(x_1-x_2)}\int_\alpha^\beta\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right)dx = \frac{1}{a(x_1-x_2)}\left[\ln|x-x_1| - \ln|x-x_2|\right]\Big|_\alpha^\beta = \frac{1}{a(x_1-x_2)}\ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right|\Big|_\alpha^\beta$$

+ Nếu $\Delta = 0$: $\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-x_0)^2}$ $\left(x_0 = \frac{-b}{2a}\right)$

thì $I = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int_\alpha^\beta \frac{dx}{(x-x_0)^2} = -\frac{1}{a(x-x_0)}\Big|_\alpha^\beta$

+ Nếu $\Delta < 0$ thì $I = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}\right)^2\right]}$

Đặt $x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}\tan t \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\Delta}{a^2}}\left(1+\tan^2 t\right)dt$

Dạng 3: $I = \int_\alpha^\beta \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx,$ $(a \neq 0)$.

(trong đó $f(x) = \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}$ liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$)

+) Bằng phương pháp đồng nhất hệ số, ta tìm A và B sao cho:

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}=\frac{A(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c}+\frac{B}{ax^2+bx+c}=\frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}+\frac{B}{ax^2+bx+c}$$

+)Ta có I= $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx+\int_{\alpha}^{\beta}\frac{B}{ax^2+bx+c}dx$

. Tích phân $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx = A\ln\left|ax^2+bx+c\right|\Big|_{\alpha}^{\beta}$

Tích phân $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ thuộc dạng 2.

Tính tích phân $I=\int_a^b\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ với P(x) và Q(x) là đa thức của x.

- Nếu bậc của P(x) lớn hơn hoặc bằng bậc của Q(x) thì dùng phép chia đa thức.
- Nếu bậc của P(x) nhỏ hơn bậc của Q(x) thì có thể xét các trường hợp:

+ Khi Q(x) chỉ có nghiệm đơn $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ thì đặt

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{x-\alpha_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-\alpha_n}.$$

+ Khi Q(x) có nghiệm đơn và vô nghiệm

$Q(x)=\left(x-\alpha\right)\left(x^2+px+q\right),\Delta=p^2-4q<0$ thì đặt

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{Bx+C}{x^2+px+q}.$$

+ Khi Q(x) có nghiệm bội

$Q(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^2$ với $\alpha\neq\beta$ thì đặt

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\frac{C}{\left(x-\beta\right)^2}.$$

$Q(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^3$ với $\alpha\neq\beta$ thì đặt

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^2(x-\beta)^3}=\frac{A}{(x-\alpha)^2}+\frac{B}{(x-\alpha)}+\frac{C}{(x-\beta)^3}+\frac{D}{(x-\beta)^2}+\frac{E}{x-\beta}$$

2. Tích phân hàm vô tỉ

$\int_a^b R(x,f(x))dx$ **Trong đó *R(x, f(x))* có dạng:**

+) $R\left(x,\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)$ Đặt $x=a\cos 2t$, $t\in[0;\frac{\pi}{2}]$

+) $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$ Đặt $x=|a|\sin t$ hoặc $x=|a|\cos t$

+) $R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ Đặt $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

+) $R\left(x,f(x)\right)=\frac{1}{(ax+b)\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$ Với $\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)'=k\left(ax+b\right)$

Đặt $t=\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$, hoặc Đặt $t=\frac{1}{ax+b}$

+) $R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)$ Đặt x = $|a|\tan t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

+) $R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)$ Đặt $x=\frac{|a|}{\cos x}$, $t\in\left[0;\pi\right]\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

+) $R\left(\sqrt[n_1]{x};\sqrt[n_2]{x};...;\sqrt[n_i]{x}\right)$ *Gọi* $k=BSCNN\left(n_1;\ n_2;\ ...;\ n_i\right)$ Đặt $x=t^k$

a. Tích phân dạng : $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \quad (a\neq 0)$

Từ : $f(x)=ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{b}{2a}=u\\ \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=K\end{cases}\leftrightarrow du=dx$

Khi đó ta có :

- Nếu $\Delta<0, a>0\Rightarrow f(x)=a\left(u^2+k^2\right)\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\sqrt{a}.\sqrt{u^2+k^2}$ (1)

- Nếu : $\Delta=0\Rightarrow f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \sqrt{f(x)}=\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\sqrt{a}.|u|\end{cases}$ (2)

- Nếu : $\Delta>0$.

+ Với a>0 : $f(x)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\sqrt{a}.\sqrt{\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}$ (3)

+ Với a<0 : $f(x)=-a\left(x_1-x\right)\left(x_2-x\right)\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\sqrt{-a}.\sqrt{\left(x_1-x\right)\left(x_2-x\right)}$ (4)

Căn cứ vào phân tích trên , ta có một số cách giải sau :

Phương pháp :

* Trường hợp : $\Delta<0, a>0\Rightarrow f(x)=a\left(u^2+k^2\right)\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\sqrt{a}.\sqrt{u^2+k^2}$

Khi đó đặt : $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}.x$

$$\Rightarrow\begin{cases}bx+c=t^2-2\sqrt{a}x\\ x=\alpha\rightarrow t=t_0, x=\beta\rightarrow t=t_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}};dx=\frac{2}{\left(b+2\sqrt{a}\right)}tdt\\ t-\sqrt{a}.x=t-\sqrt{a}\frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}}\end{cases}$$

* Trường hợp : $\Delta=0\Rightarrow f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \sqrt{f(x)}=\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\sqrt{a}.|u|\end{cases}$

Khi đó : $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|}dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\left|x+\frac{b}{2a}\right|}dx=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(x+\frac{b}{2a}\right)\Big|_{\alpha}^{\beta}: x+\frac{b}{2a}>0\\ -\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(x+\frac{b}{2a}\right)\Big|_{\alpha}^{\beta}: x+\frac{b}{2a}<0\end{array}\right.$

* Trường hợp : $\Delta>0, a>0$

- Đặt : $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}=\left[\begin{array}{l}\left(x-x_1\right)t\\ \left(x-x_2\right)t\end{array}\right.$

* Trường hợp : $\Delta > 0, a < 0$

- Đặt : $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x_1-x)(x_2-x)} = \left[\begin{array}{l}(x_1-x)t \\ (x_2-x)t\end{array}\right.$

b. Tích phân dạng : $I = \int_\alpha^\beta \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \quad (a \neq 0)$

Phương pháp :

+Bước 1: Phân tích $f(x) = \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{A.d\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (1)$

+Bước 2: Quy đồng mẫu số , sau đó đồng nhất hệ số hai tử số để suy ra hệ hai ẩn số A,B

+Bước 3: Giải hệ tìm A,B thay vào (1)

+Bước4 : Tính I $= 2A\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\Big|_\alpha^\beta + B\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \quad (2)$

Trong đó $\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \quad (a \neq 0)$ đã biết cách tính ở trên

a. Tích phân dạng : $I = \int_\alpha^\beta \frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \quad (a \neq 0)$

Phương pháp :

+Bước 1: Phân tích : $\frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{m\left(x+\frac{n}{m}\right)\sqrt{ax^2+bx+c}}$. (1)

+Bước 2: Đặt : $\frac{1}{y} = x + \frac{n}{m} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x+t}\left(t = \frac{n}{m}\right) \rightarrow dy = -\frac{1}{x+t}dx \\ x = \frac{1}{y} - t \Rightarrow ax^2+bx+c = a\left(\frac{1}{y}-t\right)^2 + b\left(\frac{1}{y}-t\right) + c \end{cases}$

+Bước 3: Thay tất cả vào (1) thì I có dạng : $I = \pm\int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{dy}{\sqrt{Ly^2+My+N}}$.

d. Tích phân dạng : $I = \int_\alpha^\beta R(x;y)dx = \int_\alpha^\beta R\left(x;\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$

Trong đó $R(x;y)$: là hàm số hữu tỷ đối với hai biến số x,y và $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ là các hằng số đã biết

Phương pháp :

+Bước 1: Đặt : $t = \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$

+Bước 2: Tính x theo t : Bằng cách nâng lũy thừa bậc m hai vế ta có dạng $x = \varphi(t)$

+Bước 3: Tính vi phân hai vế : $dx = \varphi'(t)dt$ và đổi cận

+Bước 4: Tính : $\int_\alpha^\beta R\left(x;\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx = \int_{\alpha'}^{\beta'} R(\varphi(t);t)\varphi'(t)dt$

3. Tích phân hàm lượng giác

Một số công thức lượng giác

a. Công thức cộng:

$$\cos(a \pm b) = \cos a.\cos b\ \ \sin a.\sin b$$
$$\sin(a \pm b) = \sin a.\cos b \pm \sin b.\cos a$$
$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a.\tan b}$$

b. Công thức nhân:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$$

$$\sin 2a = 2\sin a.\cos a = \frac{2\tan a}{1+\tan^2 a} \quad ; \quad \tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \quad ; \quad \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

c. Công thức hạ bậc:

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2} \ ; \ \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \ ; \ \tan^2 a = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$$

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4} \quad ; \quad \cos^3\alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3\cos\alpha}{4}$$

d. Công thức tính theo t : $t = \tan\frac{a}{2}$

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \tan a = \frac{2t}{1-t^2}$$

e.Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\cos\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$
$$\sin\alpha.\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$
$$\sin\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

f. Công thức biến đổi tổng thành tích:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$
$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Hệ quả:

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

Công thức thường dùng:

$$\cos^4\alpha + \sin^4\alpha = \frac{3+\cos 4\alpha}{4}$$
$$\cos^6\alpha + \sin^6\alpha = \frac{5+3\cos 4\alpha}{8}$$

Một số dạng tích phân lượng giác

- Nếu gặp $I=\int_a^b f(\sin x).\cos x dx$ ta đặt $t=\sin x$.
- Nếu gặp dạng $I=\int_a^b f(\cos x).\sin x dx$ ta đặt $t=\cos x$.
- Nếu gặp dạng $I=\int_a^b f(\tan x)\frac{dx}{\cos^2 x}$ ta đặt $t=\tan x$.
- Nếu gặp dạng $I=\int_a^b f(\cot x)\frac{dx}{\sin^2 x}$ ta đặt $t=\cot x$.

I. Dạng 1: $I_1=\int(\sin x)^n dx$; $I_2\int(\cos x)^n dx$

2. Phương pháp

2.1. Nếu n chẵn thì sử dụng công thức hạ bậc

2.2. Nếu n = 3 thì sử dụng công thức hạ bậc hoặc biến đổi theo 2.3.

2.3. Nếu $3 \le n$ lẻ ($n = 2p + 1$) thì thực hiện biến đổi:

$$I_1=\int(\sin x)^n dx=\int(\sin x)^{2p+1}dx=\int(\sin x)^{2p}\sin x dx=-\int\left(1-\cos^2 x\right)^p d(\cos x)$$

$$=-\int\left[C_p^0-C_p^1\cos^2 x+\ldots+(-1)^k C_p^k\left(\cos^2 x\right)^k+\ldots+(-1)^p C_p^p\left(\cos^2 x\right)^p\right]d(\cos x)$$

$$=-\left[C_p^0\cos x-\frac{1}{3}C_p^1\cos^3 x+\ldots+\frac{(-1)^k}{2k+1}C_p^k(\cos x)^{2k+1}+\ldots+\frac{(-1)^p}{2p+1}C_p^p(\cos x)^{2p+1}\right]+C$$

$$I_2=\int(\cos x)^n dx=\int(\cos x)^{2p+1}dx=\int(\cos x)^{2p}\cos x dx=\int\left(1-\sin^2 x\right)^p d(\sin x)$$

$$=\int\left[C_p^0-C_p^1\sin^2 x+\ldots+(-1)^k C_p^k\left(\sin^2 x\right)^k+\ldots+(-1)^p C_p^p\left(\sin^2 x\right)^p\right]d(\sin x)$$

$$=\left[C_p^0\sin x-\frac{1}{3}C_p^1\sin^3 x+\ldots+\frac{(-1)^k}{2k+1}C_p^k(\sin x)^{2k+1}+\ldots+\frac{(-1)^p}{2p+1}C_p^p(\sin x)^{2p+1}\right]+C$$

II. Dạng 2: $I=\int\sin^m x\cos^n x\,dx$ $(m, n\in N)$

1. Phương pháp:

1.1. Trường hợp 1: m, n là các số nguyên

a. Nếu m chẵn, n chẵn thì sử dụng công thức hạ bậc, biến đổi tích thành tổng.

b. Nếu m chẵn, n lẻ ($n = 2p + 1$) thì biến đổi:

$$I=\int(\sin x)^m(\cos x)^{2p+1}dx=\int(\sin x)^m(\cos x)^{2p}\cos x dx=\int(\sin x)^m\left(1-\sin^2 x\right)^p d(\sin x)$$

$$=\int(\sin x)^m\left[C_p^0-C_p^1\sin^2 x+\ldots+(-1)^k C_p^k\left(\sin^2 x\right)^k+\ldots+(-1)^p C_p^p\left(\sin^2 x\right)^p\right]d(\sin x)=$$

$$\left[C_p^0\frac{(\sin x)^{m+1}}{m+1}-C_p^1\frac{(\sin x)^{m+3}}{m+3}+\ldots+(-1)^k C_p^k\frac{(\sin x)^{2k+1+m}}{2k+1+m}+\ldots+(-1)^p C_p^p\frac{(\sin x)^{2p+1+m}}{2p+1+m}\right]+C$$

c. Nếu m chẵn, n lẻ ($n = 2p + 1$) thì biến đổi:

$$I=\int(\sin x)^{2p+1}(\cos x)^n dx=\int(\cos x)^n(\sin x)^{2p}\sin x dx=-\int(\cos x)^n\left(1-\cos^2 x\right)^p d(\cos x)$$

$$=-\int(\cos x)^n\left[C_p^0-C_p^1\cos^2 x+\ldots+(-1)^k C_p^k\left(\cos^2 x\right)^k+\ldots+(-1)^p C_p^p\left(\cos^2 x\right)^p\right]d(\cos x)=$$

$$-\left[C_p^0\frac{(\cos x)^{n+1}}{n+1}-C_p^1\frac{(\cos x)^{n+3}}{n+3}+\ldots+(-1)^k C_p^k\frac{(\cos x)^{2k+1+n}}{2k+1+n}+\ldots+(-1)^p C_p^p\frac{(\cos x)^{2p+1+n}}{2p+1+n}\right]+C$$

d. Nếu m lẻ, n lẻ thì sử dụng biến đổi 1.2. hoặc 1.3. cho số mũ lẻ bé hơn.

1.2. Nếu m, n là các số hữu tỉ thì biến đổi và đặt u = sinx ta có:

$$B=\int \sin^m x\cos^n x dx=\int (\sin x)^m\left(\cos^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}}\cos x dx=\int u^m\left(1-u^2\right)^{\frac{m-1}{2}}du \quad (*)$$

• Tích phân (*) tính được ⇔ 1 trong 3 số $\dfrac{m+1}{2}$; $\dfrac{n-1}{2}$; $\dfrac{m+k}{2}$ là số nguyên

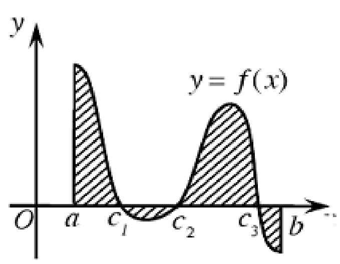
III. Dạng 3: $I_1=\int(\tan x)^n dx$; $I_2=\int(\cot x)^n dx$ (n∈N). *Công thức sử dụng:*

- $\int\left(1+\tan^2 x\right)dx=\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\int d(\tan x)=\tan x+c$
- $\int\left(1+\cot^2 x\right)dx=-\int\dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\int d(\cot x)=-\cot x+C$
- $\int \tan x dx=\int\dfrac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\dfrac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C$
- $\int \cot x dx=\int\dfrac{\cos x}{\sin x}dx=\int\dfrac{d(\sin x)}{\sin x}=\ln|\sin x|+C$

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

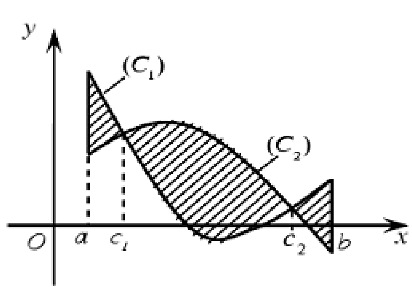
1. Diện tích hình phẳng

a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được xác định: $S=\int_a^b|f(x)|dx$



$$(H)\begin{cases}y=f(x)\\ y=0\\ x=a\\ x=b\end{cases} \qquad \boxed{S=\int_a^b|f(x)|dx}$$

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được xác định: $S=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$



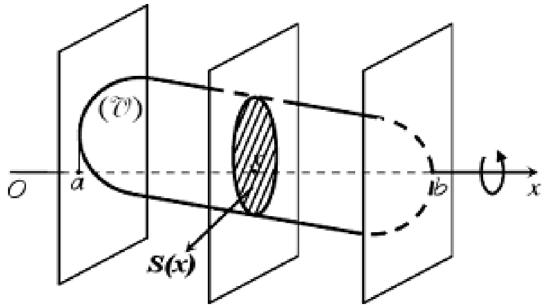
$$(H)\begin{cases}(C_1): y=f_1(x)\\ (C_2): y=f_2(x)\\ x=a\\ x=b\end{cases} \qquad \boxed{S=\int_a^b|f_1(x)-f_2(x)|dx}$$

- Nếu trên đoạn $[a;b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b|f(x)|dx=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$
- Nắm vững cách tính tích phân của hàm số có chứa giá trị tuyệt đối
- Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=g(y)$, $x=h(y)$ và hai đường thẳng $y=c$, $y=d$ được xác định: $S=\int_c^d|g(y)-h(y)|dy$

2. Thể tích vật thể và thể tích khối tròn xoay

a) Thể tích vật thể:

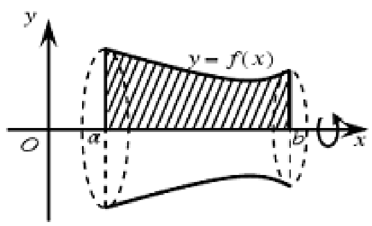
Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.



$$V = \int_a^b S(x)dx$$

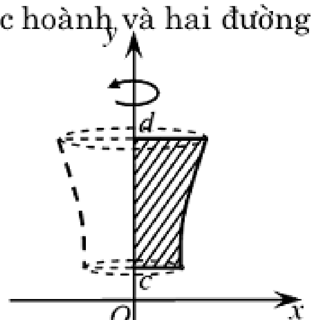
b) Thể tích khối tròn xoay:

Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox:



$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$$

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy:



$$\begin{cases} (C): x = g(y) \\ (Oy): x = 0 \\ y = c \\ y = d \end{cases} \qquad V_y = \pi\int_c^d [g(y)]^2 dy$$

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox:

$$V = \pi\int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right| dx$$

PHẦN IV. SỐ PHỨC

I. SỐ PHỨC

1. Khái niệm số phức

+ Số phức (dạng đại số) : $z = a + bi;\ (a,b \in \mathbb{R})$. Trong đó : a là phần thực, b là phần ảo, i là đơn vị ảo, $i^2 = -1$.

+ Tập hợp số phức kí hiệu: $\mathbb{C}$.

+ z là số thực $\Leftrightarrow$ phần ảo của z bằng 0 $(b = 0)$.

+ z là số ảo (hay còn gọi là thuần ảo) $\Leftrightarrow$ phần thực bằng 0 $(a = 0)$.

Số 0 vừa là số thực vừa là số ảo.

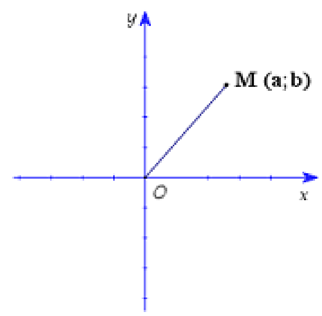
2. Hai số phức bằng nhau

Hai số phức $z_1 = a + bi\ (a,\ b \in \mathbb{R})$ và $z_2 = c + di\ (c,\ d \in \mathbb{R})$ bàng nhau khi phần thực và phần ảo của chúng tương đương bằng nhau.

Khi đó ta viết $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$

3. Biểu diễn hình học số phức

Số phức $z = a + bi\ (a,\ b \in \mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$ hay bởi $\vec{u} = (a;b)$ trong mặt phẳng phức với hệ tọa độ Oxy.



4. Số phức liên hợp

Số phức liên hợp của $z = a + bi\ (a,\ b \in \mathbb{R})$ là $\bar{z} = a - bi$.

Một số tính chất:

+ $\bar{\bar{z}} = z$; $\overline{z \pm z'} = \bar{z} \pm \bar{z}'$; $\overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z}'$; $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$; $z.\bar{z} = a^2 + b^2$.

+ z là số thực $\Leftrightarrow z = \bar{z}$; z là số ảo $z = -\bar{z}$.

5. Môđun của số phức

Độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là **môđun của số phức** z và kí hiệu là $|z|$.

Vậy $|z| = |\overrightarrow{OM}|$ hay $|z| = |a + bi| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Một số tính chất:

+ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |\overrightarrow{OM}|$; $|\bar{z}| = |z|$

+ $|z| \ge 0, \forall z \in \mathbb{C};\ |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

+ $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$; $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$.

+ $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

II. PHÉP CỘNG TRỪ NHÂN CHIA SỐ PHỨC

1. Phép cộng và phép trừ số phức

Cho hai số phức $z_1 = a + bi$ $(a,\ b \in \mathbb{R})$ và $z_2 = c + di$ $(c,\ d \in \mathbb{R})$. Khi đó:

+ $z_1 \pm z_2 = (a + c) \pm (b + d)i$

+ Số đối của số phức $z = a + bi$ là $-z = -a - bi$.

+ Tổng của một số phức với số phức liên hợp của nó bằng hai lần phần thực của số thực đó: $z = a + bi, z + \bar{z} = 2a$.

2. Phép nhân số phức

+ Cho hai số phức $z_1 = a + bi$ $(a,\ b \in \mathbb{R})$ và $z_2 = c + di$ $(c,\ d \in \mathbb{R})$. Khi đó

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

+ Với mọi số thực k và mọi số phức $z = a + bi$ $(a,\ b \in \mathbb{R})$, ta có

$$k.z = k.(a + bi) = ka + kbi.$$

Đặc biệt: $0.z = 0$ với mọi số phức z.

+ Lũy thừa của i **:** $i^0 = 1,\quad i^1 = i,\quad i^2 = -1,\quad i^3 = i^2.i = -i$

$$i^{4n} = 1,\quad i^{4n+1} = i,\quad i^{4n+2} = -1,\quad i^{4n+3} = -i,\quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

3. Chia hai số phức

Số phức nghịch đảo của z khác 0 là số $z^{-1} = \dfrac{1}{|z|^2}\bar{z}$.

Phép chia hai số phức z' và $z \neq 0$ là $\dfrac{z'}{z} = z'z^{-1} = \dfrac{z'.\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{z'.\bar{z}}{z.\bar{z}}$.

III. TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC

Một số tập hợp điểm biểu diễn số phức z thường gặp:

+ $ax + by + c = 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường thẳng

+ $x = 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là trục tung Oy

+ $y = 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là trục hoành Ox

+ $(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2 \Rightarrow$ tập hợp điểm là *hình tròn* tâm $I(a;b)$, bán kính R

+ $\left[\begin{array}{l}(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0\end{array}\right. \Rightarrow$ tập hợp điểm là *đường tròn* có tâm $I(a;b)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

+ $x > 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là miền bên phải trục tung

+ $y < 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là miền phía dưới trục hoành

+ $x < 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là miền bên trái trục tung

+ $y > 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là phía trên trục hoành

+ $y = ax^2 + bx + c \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường Parabol

+ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường Elip

+ $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường Hyperbol

IV. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

a. Căn bậc hai của số thực âm

+ Cho số z, nếu có số phức z_1 sao cho $z_1^2 = z$ thì ta nói z_1 là một căn bậc hai của z.

+ Mọi số phức $z \neq 0$ đều có hai căn bậc hai.

+ Căn bậc hai của số thực z âm là $\pm i\sqrt{|z|}$.

Tổng quát, các căn bậc hai của số thực a âm là $\pm i\sqrt{|a|}$.

b. Phương trình bậc hai với hệ số thực

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0, \forall a,b,c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Xét biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$ của phương trình. Ta thấy:

+ Khi $\Delta = 0$, phương trình có một nghiệm thực $x = -\dfrac{b}{2a}$.

+ Khi $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

+ Khi $\Delta < 0$, phương trình có hai nghiệm phức $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{\Delta}}{2a}$.

BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN MAX – MIN MÔ ĐUN SỐ PHỨC

+ Cho số phức z thỏa mãn $|z_1.z + z_2| = r, (r > 0)$ $\begin{cases} \max|z| = \left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| + \dfrac{r}{|z_1|} \\ \min|z| = \left|\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| - \dfrac{r}{|z_1|}\right| \end{cases}$.

+ Cho số phức z thỏa mãn $|z_1.z - z_2| = r_1, (r_1 > 0)$.

$$\max P = \left|\frac{z_2}{z_1} - z_3\right| + \frac{r_1}{|z_1|} \text{ và } \min P = \left|\left|\frac{z_2}{z_1} - z_3\right| - \frac{r_1}{|z_1|}\right|$$

+ Cho số phức z thỏa mãn $|z_1.z + z_2| + |z_1.z - z_2| = k, \ (k > 0)$.

$$\max|z| = \frac{k}{2|z_1|} \text{ và } \min|z| = \frac{\sqrt{k^2 - 4|z_2|^2}}{2|z_1|}$$

PHẦN V. KHỐI ĐA DIỆN

I- KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN:

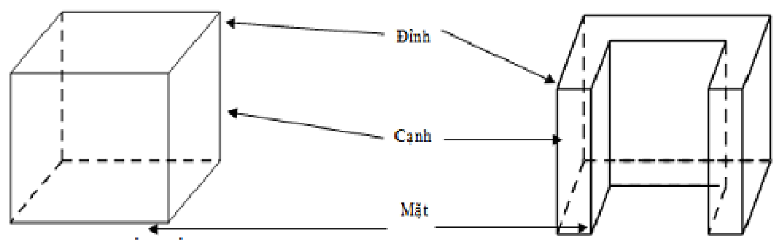
1. Khái niệm về hình đa diện:

• Hình đa diện (gọi tắt là đa diện) là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:

a) Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.

b) Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

• Mỗi đa giác gọi là một mặt của hình đa diện. Các đỉnh, cạnh của các đa giác ấy theo thứ tự được gọi là các đỉnh, cạnh của hình đa diện.

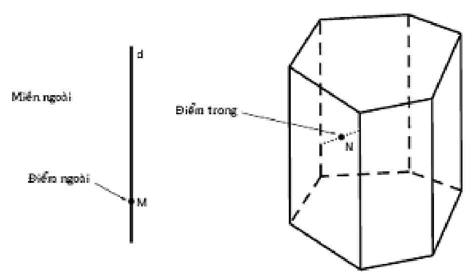


2. Khái niệm về khối đa diện:

• Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

• Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là điểm ngoài của khối đa diện. Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện đó được gọi là điểm trong của khối đa diện. Tập hợp các điểm trong được gọi là miền trong, tập hợp những điểm ngoài được gọi là miền ngoài của khối đa diện.

• Mỗi hình đa diện chia các điểm còn lại của không gian thành hai miền không giao nhau là miền trong và miền ngoài của hình đa diện, trong đó chỉ có miền ngoài là chứa hoàn toàn một đường thẳng nào đó.



III- HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU:

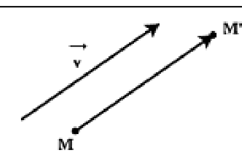
1. Phép dời hình trong không gian:

Trong không gian, quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' xác định duy nhất được gọi là một phép biến hình trong không gian.

Phép biến hình trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.

** Một số phép dời hình trong không gian:*

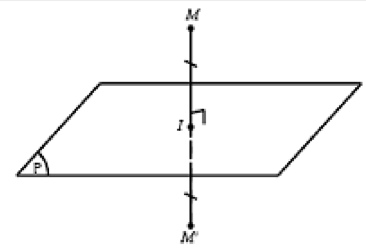
a) Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$:

Là phép biến hình biến mỗi điểm M thành M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.	

b) Phép đối xứng qua mặt phẳng (P):

Là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM'.

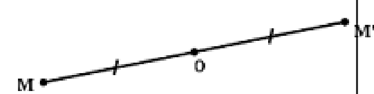
Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình (H) thành chính nó thì (P) được gọi là mặt phẳng đối xứng của (H).



c) Phép đối xứng qua tâm O:

Là phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho O là trung điểm MM'.

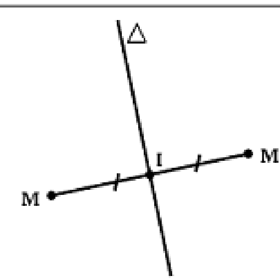
Nếu phép đối xứng tâm O biến hình (H) thành chính nó thì O được gọi là tâm đối xứng của (H)



d) Phép đối xứng qua đường thẳng Δ (phép đối xứng trục Δ):

Là phép biến hình biến mọi điểm thuộc đường thẳng Δ thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc Δ thành điểm M' sao cho Δ là đường trung trực của MM'.

Nếu phép đối xứng trục Δ biến hình (H) thành chính nó thì Δ được gọi là trục đối xứng của (H)



* *Nhận xét:*

- *Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.*
- *Phép dời hình biến đa diện (H) thành đa diện (H'), biến đỉnh, cạnh, mặt của (H) thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của (H').*

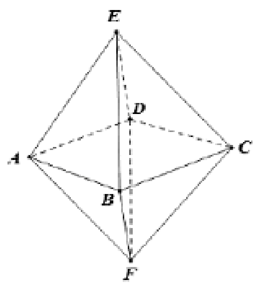
2. Hai hình bằng nhau:

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

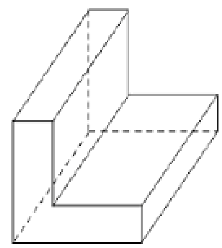
KHỐI ĐA DIỆN LỒI

I. Khối đa diện lồi

Khối đa diện được gọi là *khối đa diện lồi* nếu với bất kì hai điểm A và B nào của nó thì mọi điểm của đoạn AB cũng thuộc khối đó.



Khối đa diện lồi



Khối đa diện không lồi

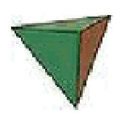
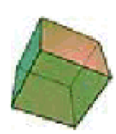
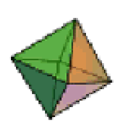
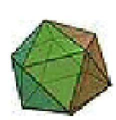
II. Khối đa diện đều

1. Định nghĩa: *Khối đa diện đều* là một khối đa diện lồi có hai tính chất sau đây:

+ Các mặt là những đa giác đều n cạnh.
+ Mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng p cạnh.

Khối đa diện đều như vậy gọi là khối đa diện đều loại $\{n, p\}$.

2. Bảng tóm tắt của năm loại khối đa diện đều

Khối đa diện đều		*Số đỉnh*	*Số cạnh*	*Số mặt*	*Loại*	*Số MPĐX*
Tứ diện đều		4	6	4	$\{3;3\}$	6
Khối lập phương		8	12	6	$\{4;3\}$	9
Bát diện đều		6	12	8	$\{3;4\}$	9
Mười hai mặt đều		20	30	12	$\{5;3\}$	15
Hai mươi mặt đều		12	30	20	$\{3;5\}$	15

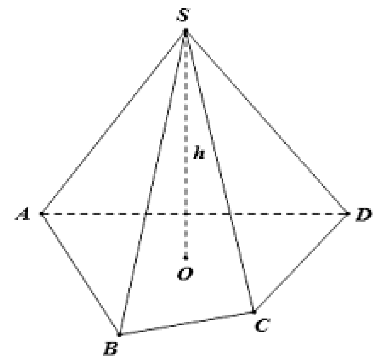
Khối đa diện đều loại $\{n, p\}$ có Đ đỉnh, C cạnh và M mặt: $\boxed{pĐ = 2C = nM}$.

THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3}S_{đáy}.h$

+ $S_{đáy}$: Diện tích mặt đáy.
+ h: Độ dài chiều cao khối chóp.

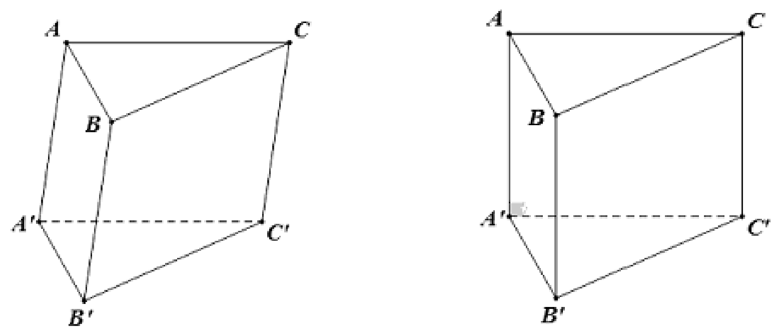
$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}d_{(S,(ABCD))}.S_{ABCD}$$



Thể tích khối lăng trụ: $V = S_{đáy}.h$

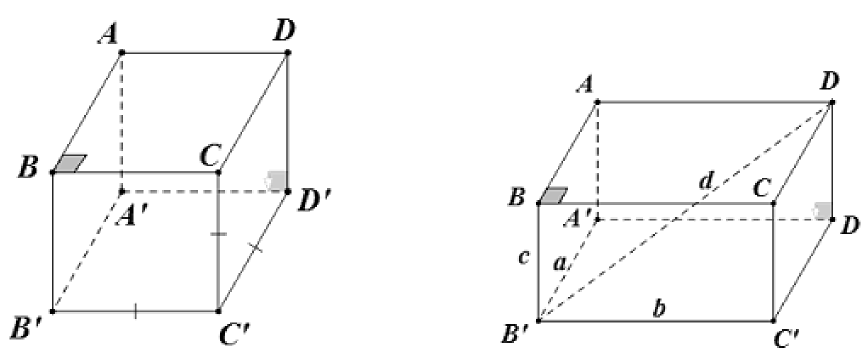
+ $S_{đáy}$: Diện tích mặt đáy.
+ h: Chiều cao của khối chóp.

Lưu ý: Lăng trụ đứng có chiều cao chính là cạnh bên.



Thể tích khối hộp chữ nhật: $V = a.b.c$

Thể tích khối lập phương: $V = a^3$



** Chú ý:*

- *Đường chéo của hình vuông cạnh a là* $a\sqrt{2}$
- *Đường chéo của hình lập phương cạnh a là :* $a\sqrt{3}$
- *Đường chéo của hình hộp chữ nhật có 3 kích thước a, b, c là :* $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- *Đường cao của tam giác đều cạnh a là:* $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

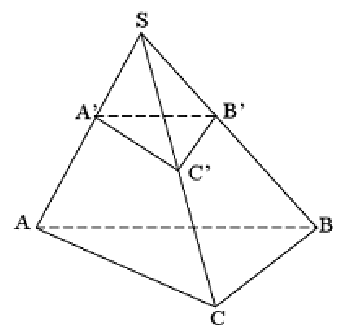
Tỉ số thể tích:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$

Hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$

$$V = \frac{h}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)$$

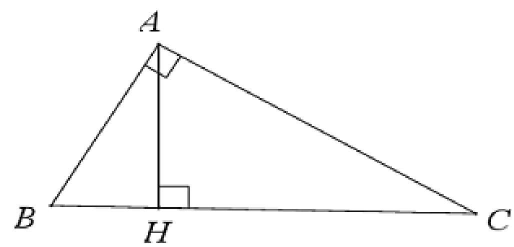
Với B, B', h là diện tích hai đáy và chiều cao.



CÁC CÔNG THỨC HÌNH PHẲNG

1. Hệ thức lượng trong tam giác

a) Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH.



- $AB^2 + AC^2 = BC^2$
- $AB^2 = BH.BC$
- $AC^2 = CH.BC$
- $AH.BC = AB.AC$
- $AH^2 = BH.HC$
- $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$
- $AB = BC.\sin C = BC.\cos B = AC.\tan C = AC.\cot B$

b) Cho ΔABC có độ dài ba cạnh là: *a, b, c độ dài các trung tuyến là* m_a, m_b, m_c *bán kính đường tròn ngoại tiếp R; bán kính đường tròn nội tiếp r nửa chu vi p.*

- Định lí hàm số cosin:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A;\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B;\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$

- Định lí hàm số sin: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$
- Độ dài trung tuyến: $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4};\ m_b^2 = \dfrac{c^2 + a^2}{2} - \dfrac{b^2}{4};\ m_c^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}$

2. Các công thức tính diện tích

a) Tam giác:

- $S = \dfrac{1}{2}a.h_a = \dfrac{1}{2}b.h_b = \dfrac{1}{2}c.h_c$
- $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ca.\sin B = \dfrac{1}{2}ab\sin C$
- $S = \dfrac{abc}{4R}$
- $S = pr$
- CT He-ron: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
- *ΔABC vuông tại A:* $S = \dfrac{AB.AC}{2} = \dfrac{BC.AH}{2}$
- *ΔABC đều, cạnh a:* $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

b) Hình vuông: $S = a^2$ *(a: cạnh hình vuông)*

c) Hình chữ nhật: $S = ab$ *(a, b: hai kích thước)*

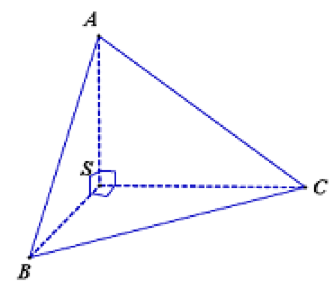
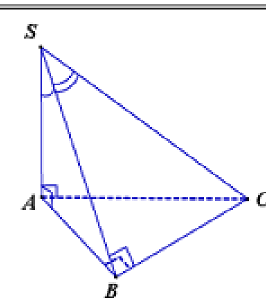
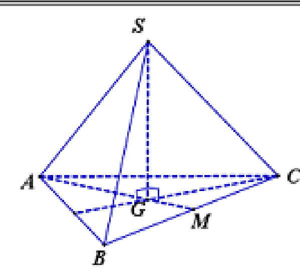
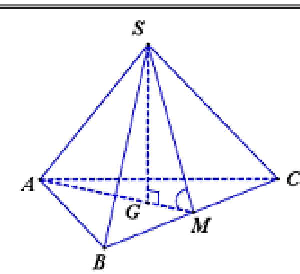
d) Hình bình hành: $S =$ *đáy* $\times$ *cao* $= AB.AD.\sin BAD$

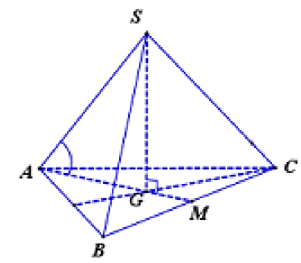
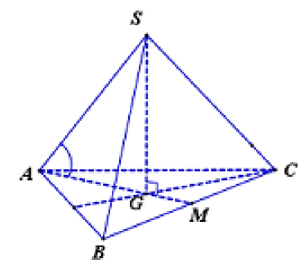
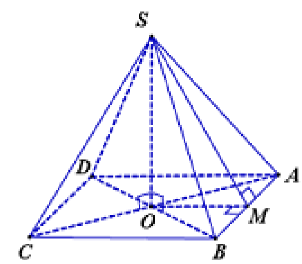
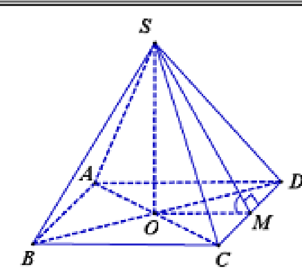
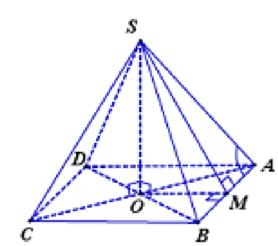
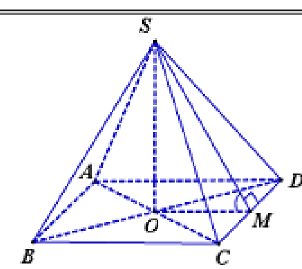
e) Hình thoi: $S = AB.AD.\sin BAD = \frac{1}{2}AC.BD$

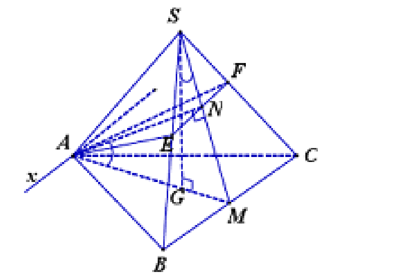
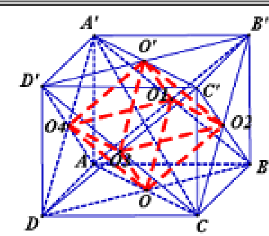
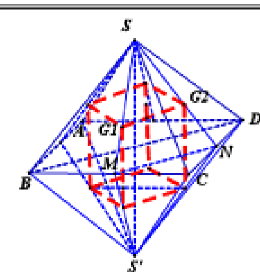
f) Hình thang: $S = \frac{1}{2}(a+b)h$ *(a, b: hai đáy, h: chiều cao)*

g) Tứ giác có hai đường chéo vuông góc: $S = \frac{1}{2}AC.BD$

MỘT SỐ CÔNG THỨC TÍNH NHANH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP THƯỜNG GẶP

TÍNH CHẤT	HÌNH VẼ
Cho hình chóp $SABC$ với các mặt phẳng $(SAB),(SBC),(SAC)$ vuông góc với nhau từng đôi một, diện tích các tam giác SAB, SBC, SAC lần lượt là S_1, S_2, S_3. Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2S_1.S_2.S_3}}{3}$	
Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC), hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, $BSC = \alpha, ASB = \beta$. Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{SB^3.\sin 2\alpha.\tan\beta}{12}$	
Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên bằng b. Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{12}$	
Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với mặt phẳng đáy góc α. Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{a^3\tan\alpha}{24}$	

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên bằng b và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc β. Khi đó: $V_{S.ABC}=\dfrac{\sqrt{3}b^3.\sin\beta\cos^2\beta}{4}$	
Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh đáy bằng a, cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc β. Khi đó: $V_{S.ABC}=\dfrac{a^3.\tan\beta}{12}$	
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, và $SA=SB=SC=SD=b$. Khi đó: $V_{S.ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{4b^2-2a^2}}{6}$	
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc tạo bởi mặt bên và mặt phẳng đáy là α. Khi đó: $V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3.\tan\alpha}{6}$	
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, $SAB=\alpha$, với $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$ Khi đó: $V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{\tan^2\alpha-1}}{6}$	
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng a, góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy là α với $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Khi đó: $V_{S.ABCD}=\dfrac{4a^3.\tan\alpha}{3\sqrt{\left(2+\tan^2\alpha\right)^3}}$	

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A song song với BC và vuông góc với (SBC), góc giữa (P) với mặt phẳng đáy là α. Khi đó: $V_{S.ABCD} = \dfrac{a^3 \cot\alpha}{24}$	
Khối tám mặt đều có đỉnh là tâm các mặt của hình lập phương cạnh a. Khi đó: $V = \dfrac{a^3}{6}$	
Cho khối tám mặt đều cạnh a. Nối tâm của các mặt bên ta được khối lập phương. Khi đó: $V = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{27}$	

CÁC CÔNG THỨC ĐẶC BIỆT THỂ TÍCH TỨ DIỆN (ĐTD):

ĐIỀU KIỆN TỨ DIỆN	CÔNG THỨC
$\begin{cases} SA = a, SB = b, SC = c \\ ASB = \alpha, BSC = \beta, CSA = \varphi \end{cases}$	$V_{S.ABC} = \dfrac{abc}{6}\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\varphi + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi}$ *Công thức tính khi biết 3 cạnh, 3 góc ở đỉnh 1 tứ diện*
$\begin{cases} AB = a, CD = b \\ d(AB, CD) = d, (AB, CD) = \alpha \end{cases}$	$V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}abd\sin\alpha$ *Công thức tính khi biết 2 cạnh đối, khoảng cách và góc 2 cạnh đó*
$\begin{cases} S_{\Delta SAB} = S_1, S_{\Delta SAC} = S_2, SA = a \\ ((SAB),(SAC)) = \alpha \end{cases}$	$V_{SABC} = \dfrac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}$ *Công thức tính khi biết một cạnh, diện tích và góc giữa 2 mặt kề*
$\begin{cases} SA = a, SB = b, SC = c \\ ((SAB),(SAC)) = \alpha \\ ASB = \beta, ASC = \varphi \end{cases}$	$V_{S.ABC} = \dfrac{abc}{6}\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi$ *Công thức tính khi biết 3 cạnh, 2 góc ở đỉnh và 1 góc nhị diện*
Tứ diện đều tất cả các cạnh bằng a	$V_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Tứ diện gần đều $\begin{cases} AB = CD = a \\ AC = BD = b \\ AD = BC = c \end{cases}$	$V_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)}$

MẶT NÓN - MẶT TRỤ - MẶT CẦU

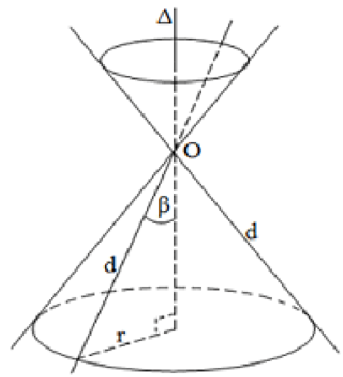
I. MẶT NÓN TRÒN XOAY VÀ KHỐI NÓN

1) *Mặt nón tròn xoay.*

Đường thẳng d, Δ cắt nhau tại O và tạo thành góc β với $0^0 < \beta < 90^0$, $mp(P)$ chứa d, Δ. (P) quay quanh trục Δ với góc β không đổi

$\Rightarrow$ mặt nón tròn xoay đỉnh O.

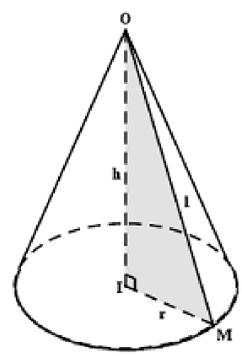
+ Δ gọi là trục.
+ d được gọi là đường sinh.
+ Góc 2β gọi là góc ở đỉnh.



2) *Khối nón*

+ Là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình nón đó. Những điểm không thuộc khối nón gọi là những điểm ngoài của khối nón.

+ Những điểm thuộc khối nón nhưng không thuộc hình nón tương ứng gọi là những điểm trong của khối nón. Đỉnh, mặt đáy, đường sinh của một hình nón cũng là đỉnh, mặt đáy, đường sinh của khối nón tương ứng.



Cho hình nón có chiều cao h, đường sinh l và bán kính đáy r.

+ ***Diện tích xung quanh:*** của hình nón: $S_{xq} = \pi r l$.

+ ***Diện tích đáy (hình tròn):*** $S_{đáy} = \pi r^2$.

+ ***Diện tích toàn phần:*** của hình nón: $S_{tp} = \pi r l + \pi r^2$.

+ ***Thể tích khối nón:*** $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

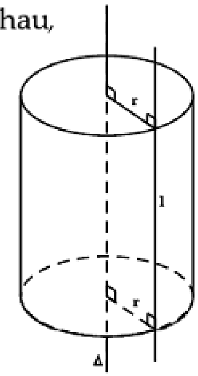
3) *Thiết diện khi cắt bởi mặt phẳng*

❖**Cắt mặt nón tròn xoay bởi mp (Q) đi qua đỉnh của mặt nón.**	
$mp(Q)$ cắt mặt nón theo 2 đường sinh.	Thiết diện là tam giác cân.
$mp(Q)$ tiếp xúc với mặt nón theo một đường sinh.	(Q) là mặt phẳng tiếp diện của hình nón.
❖**Cắt mặt nón tròn xoay bởi mp (Q) không đi qua đỉnh của mặt nón.**	
$mp(Q)$ vuông góc với trục hình nón.	Giao tuyến là 1 đường parabol.
$mp(Q)$ song song với 2 đường sinh hình nón.	Giao tuyến là 2 nhánh của 1 hypebol.
$mp(Q)$ song song với 1 đường sinh hình nón.	Giao tuyến là một đường tròn.

II. MẶT TRỤ TRÒN XOAY

1. Mặt trụ:

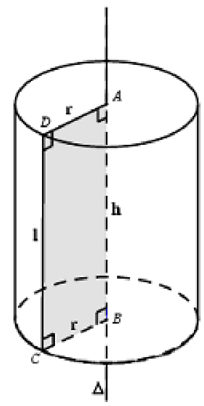
Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song với nhau, cách nhau một khoảng bằng r. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay, gọi tắt là mặt trụ.



- Đường thẳng Δ gọi là trục.
- Đường thẳng l là đường sinh.
- r là bán kính của mặt trụ đó.

2. Hình trụ tròn xoay và khối trụ tròn xoay:

a) Ta xét hình chữ nhật $ABCD$. Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh đường thẳng chứa một cạnh nào đó, chẳng hạn cạnh AB thì đường gấp khúc $ADCB$ sẽ tạo thành một hình gọi là hình trụ tròn xoay, hay gọi tắt là hình trụ.



+ Khi quay quanh AB, hai cạnh AD và BC sẽ vạch ra hai hình tròn bằng nhau gọi là hai đáy của hình trụ, bán kính của chúng gọi là bán kính của hình trụ.

+ Độ dài đoạn CD gọi là độ dài đường sinh của hình trụ.

+ Phần mặt tròn xoay được sinh ra bởi các điểm trên cạnh CD khi quay xung quanh AB gọi là mặt xung quanh của hình trụ.

+ Khoảng cách AB giữa hai mặt phẳng song song chứa hai đáy là chiều cao của hình trụ.

b) Khối trụ tròn xoay hay khối trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ tròn xoay đó. Những điểm không thuộc khối trụ gọi là những điểm ngoài của khối trụ. Những điểm thuộc khối trụ nhưng không thuộc hình trụ tương ứng gọi là những điểm trong của khối trụ. Mặt đáy, chiều cao, đường sinh, bán kính của một hình trụ cũng là mặt đáy, chiều cao, đường sinh, bán kính của khối trụ tương ứng.

Hình trụ có chiều cao h, đường sinh l và bán kính đáy r.

+ ***Diện tích xung quanh:*** $S_{xq} = 2\pi rl$.

+ ***Diện tích toàn phần:*** $S_{tp} = 2\pi rl + 2\pi r^2$.

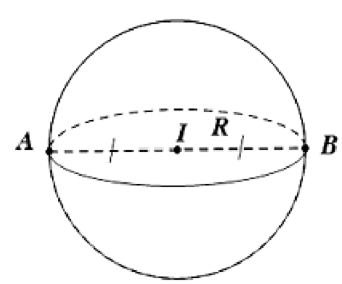
+ ***Thể tích:*** $V = \pi r^2 h$.

III. MẶT CẦU – KHỐI CẦU

1. Mặt cầu

Cho điểm I cố định và một số thực dương R.

Tập hợp tất cả những điểm M trong không gian cách I một khoảng R được gọi là mặt cầu tâm I, bán kính R.

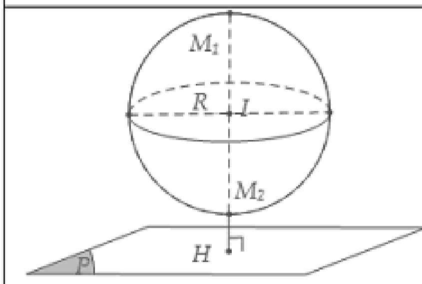
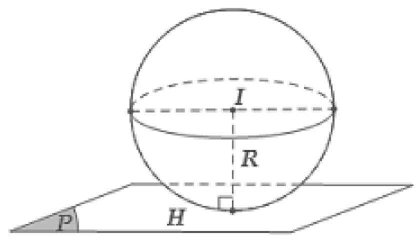
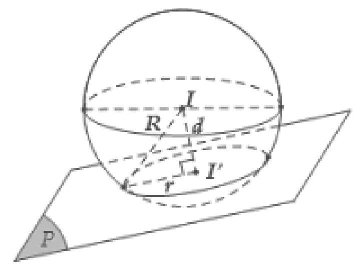


Kí hiệu: $S(I;R)$. Khi đó:

$$S(I;R) = \{M \mid IM = R\}$$

2. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

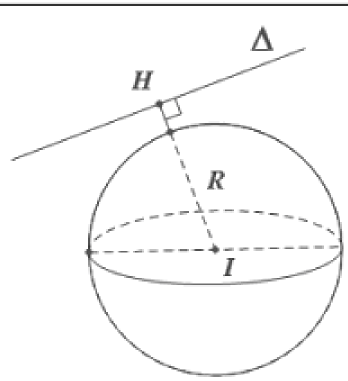
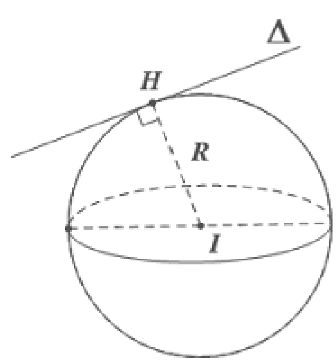
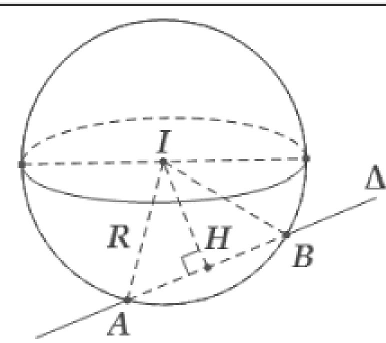
Cho mặt cầu $S\left(I;R\right)$ và mặt phẳng $\left(P\right)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $\left(P\right) \Rightarrow d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng $\left(P\right)$. Khi đó:

$d > R$	$d = R$	$d < R$
Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.	Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu: $\left(P\right)$ là mặt phẳng **tiếp diện** của mặt cầu và H: **tiếp điểm**.	Mặt phẳng cắt mặt cầu theo thiết diện là *đường tròn* có tâm I' và bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$
		

Lưu ý: Khi mặt phẳng $\left(P\right)$ đi qua tâm I của mặt cầu thì mặt phẳng $\left(P\right)$ được gọi là **<u>mặt phẳng kính</u>** và thiết diện lúc đó được gọi là **<u>đường tròn lớn.</u>**

3. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu $S\left(I;R\right)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của I lên Δ. Khi đó:

$IH > R$	$IH = R$	$IH < R$
Δ không cắt mặt cầu.	Δ tiếp xúc với mặt cầu. Δ: **Tiếp tuyến** của $\left(S\right)$ và H: **tiếp điểm.**	Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.
		

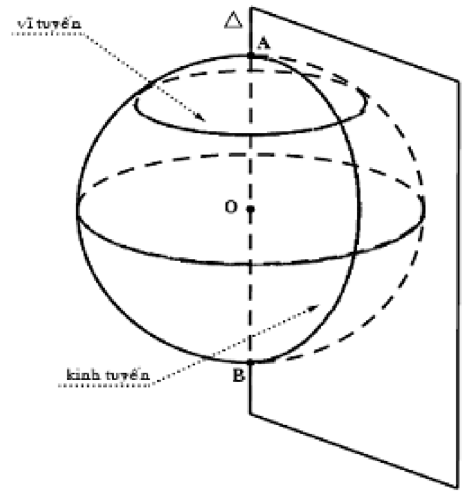
Δ cắt $\left(S\right)$ tại 2 điểm A, B thì bán kính R của $\left(S\right)$: $\begin{cases} d\left(I;\Delta\right) = IH \\ R = \sqrt{IH^2 + AH^2} = \sqrt{IH^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} \end{cases}$.

4. Đường kinh tuyến và vĩ tuyến của mặt cầu:

+ Giao tuyến của mặt cầu với nửa mặt phẳng có bờ là trục của mặt cầu được gọi là kinh tuyến.

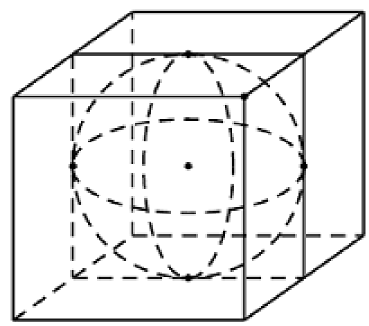
+ Giao tuyến (nếu có) của mặt cầu với các mặt phẳng vuông góc với trục được gọi là vĩ tuyến của mặt cầu.

+ Hai giao điểm của mặt cầu với trục được gọi là hai cực của mặt cầu



** Mặt cầu nội tiếp, ngoại tiếp hình đa diện:*

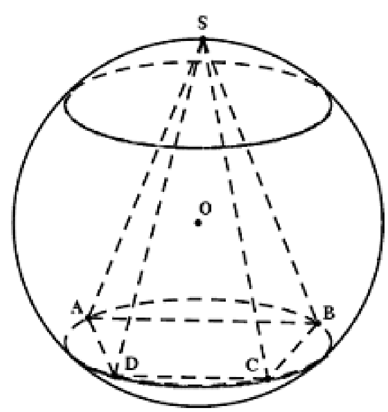
Mặt cầu nội tiếp hình đa diện nếu mặt cầu đó tiếp xúc với tất cả các mặt của hình đa diện. Còn nói hình đa diện ngoại tiếp mặt cầu.



Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện nếu tất cả các đỉnh của hình đa diện đều nằm trên mặt cầu. Còn nói hình đa diện nội tiếp mặt cầu.

Mặt cầu tâm O bán kính r ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ khi và chỉ khi:

$OA = OB = OC = OD = OS = r$



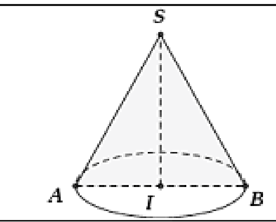
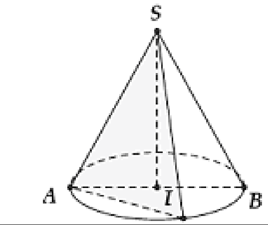
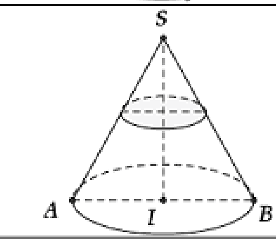
Cho mặt cầu $S(I;R)$

+ *Diện tích mặt cầu:* $\boxed{S = 4\pi R^2}$.

+ *Thể tích khối cầu:* $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$.

MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI BÀI TOÁN MẶT NÓN

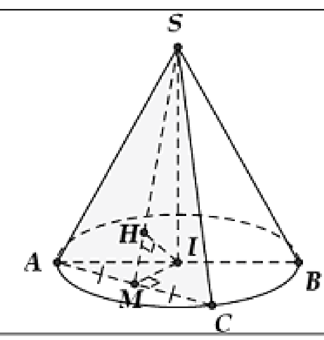
Dạng 1. Thiết diện của hình nón cắt bởi một mặt phẳng

Thiết diện qua trục *của hình nón là tam giác cân.*	
Thiết diện qua đỉnh *của hình nón là những tam giác cân có hai cạnh bên là hai đường sinh của hình nón.*	
Thiết diện vuông góc với trục *của hình nón là những đường tròn có tâm nằm trên trục của hình nón.*	

Dạng 2. Bài toán liên quan đến thiết diện qua đỉnh của hình nón

Cho hình nón có chiều cao là h, bán kính đáy r và đường sinh l.

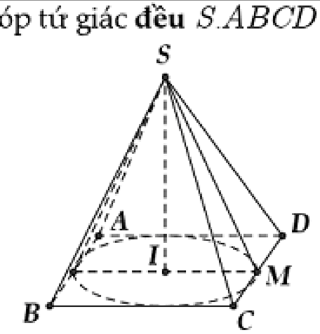
Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là d.

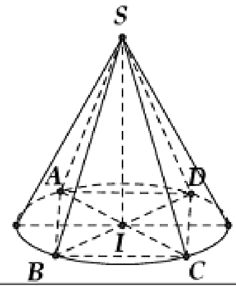
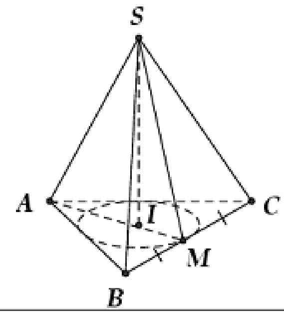
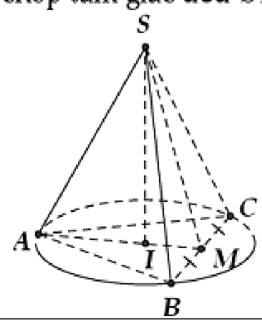
Gọi M là trung điểm của AC. Khi đó: + $AC \perp (SMI)$ + Góc giữa (SAC) và (ABC) là góc SMI. + Góc giữa (SAC) và SI là góc MSI. + $d(I,(SAC)) = IH = d$.	

Diện tích thiết diện:

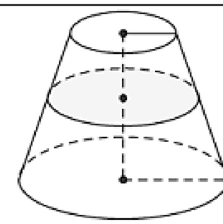
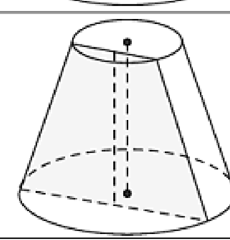
$$S_{td} = S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2}SM.AC = \frac{1}{2}\sqrt{SI^2 + IM^2}.2\sqrt{AI^2 - IM^2} = \sqrt{r^2 - \frac{h^2d^2}{h^2 - d^2}}.\sqrt{h^2 + \frac{h^2d^2}{h^2 - d^2}}$$

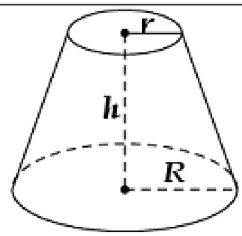
Dạng 3. Bài toán hình nón ngoại tiếp và nội tiếp hình chóp

Hình nón ***nội tiếp*** hình chóp $S.ABCD$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$. Khi đó hình nón có: + Bán kính đáy $r = IM = \frac{AB}{2}$, + Đường cao $h = SI$, đường sinh $l = SM$.	Hình chóp tứ giác **đều** $S.ABCD$ 

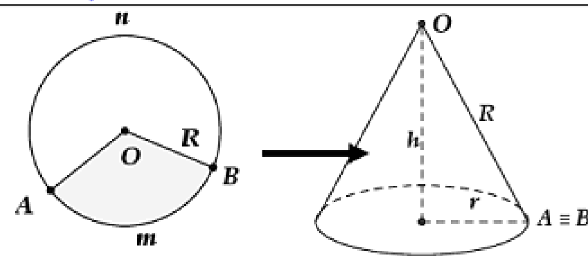
<table>
<tr><td>Hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.
Khi đó hình nón có:
+ Bán kính đáy: $r = IA = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2}$.
+ Chiều cao: $h = SI$.
+ Đường sinh: $l = SA$.</td><td>Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$

</td></tr>
<tr><td>Hình nón nội tiếp hình chóp $S.ABC$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
Khi đó hình nón có
+ Bán kính đáy: $r = IM = \frac{AM}{3} = \frac{AB\sqrt{3}}{6}$.
+ Chiều cao: $h = SI$.
+ Đường sinh: $l = SM$.</td><td>Hình chóp tam giác đều $S.ABC$

</td></tr>
<tr><td>Hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ đều là hình nón có đỉnh là S, đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Khi đó hình nón có:
+ Bán kính đáy: $r = IA = \frac{2AM}{3} = \frac{AB\sqrt{3}}{3}$.
+ Chiều cao: $h = SI$.
+ Đường sinh: $l = SA$.</td><td>Hình chóp tam giác đều $S.ABC$

</td></tr>
</table>

Dạng 4. Bài toán hình nón cụt

<table>
<tr><td colspan="3">Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì phần mặt phẳng nằm trong hình nón là một hình tròn. Phần hình nón nằm giữa hai mặt phẳng nói trên được gọi là hình nón cụt.</td></tr>
<tr><td colspan="2">+ Khi cắt hình nón cụt bởi một mặt phẳng song song với đáy thì được mặt cắt là một hình tròn.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">+ Khi cắt hình nón cụt bởi một mặt phẳng song song với trục thì được mặt cắt là một hình thang cân.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Cho hình nón cụt có $R,\ r,\ h$ lần lượt là bán kính đáy lớn, bán kính đáy nhỏ và chiều cao.</td><td colspan="2">Diện tích xung quanh của hình nón cụt: $\boxed{S_{xq} = \pi l\left(R + r\right)}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Diện tích đáy (hình tròn): $\boxed{\begin{cases} S_{đáy1} = \pi r^2 \\ S_{đáy2} = \pi R^2 \end{cases} \Rightarrow \sum S_{đáy} = \pi\left(r^2 + R^2\right)}$.</td></tr>
</table>

	*Diện tích toàn phần* của hình nón cụt: $\boxed{S_{tp} = \pi l\left(R + r\right) + \pi r^2 + \pi R^2}$. *Thể tích* khối nón cụt: $\boxed{V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + r^2 + Rr\right)}$.

Dạng 5. Bài toán hình nón tạo bởi phần còn lại của hình tròn sau khi cắt bỏ đi hình quạt

Từ hình tròn $(O;R)$ cắt bỏ đi hình quạt AmB. Độ dài cung AnB bằng x. Phần còn lại của hình tròn ghép lại được một hình nón. Tìm bán kính, chiều cao và độ dài đường sinh của hình nón đó.	 Hình nón được tạo thành có $\begin{cases} l = R \\ 2\pi r = x \Rightarrow r = \dfrac{2\pi}{x} \\ h = \sqrt{l^2 - r^2} \end{cases}$.

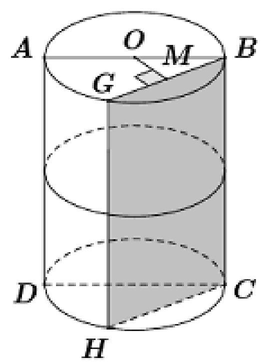
MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI BÀI TOÁN MẶT TRỤ

Dạng 1. Thiết diện của hình trụ cắt bởi một mặt phẳng

+ Thiết diện ***vuông góc trục*** là một đường tròn bán kính R.

+ Thiết diện ***chứa trục*** là một hình chữ nhật $ABCD$ trong đó $AB = 2R$ và $AD = h$. Nếu thiết diện qua trục là một hình vuông thì $h = 2R$.

+ Thiết diện ***song song với trục*** và ***không chứa trục*** là hình chữ nhật $BGHC$ có khoảng cách tới trục là: $d\left(OO';\left(BGHC\right)\right) = OM$



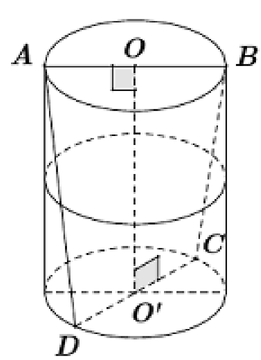
Dạng 2. Thể tích khối tứ diện có 2 cạnh là đường kính 2 đáy

Nếu như AB và CD là hai đường kính bất kỳ trên hai đáy của hình trụ thì:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.OO'.\sin\left(AB,CD\right)$$

* Đặc biệt: Nếu AB và CD vuông góc nhau thì:

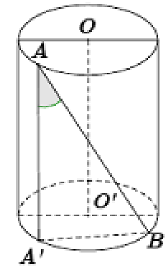
$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.OO'.$$



Dạng 3. Xác định góc khoảng cách

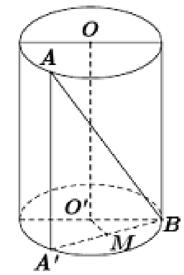
+ Góc giữa AB và trục OO':

$$\left(AB;OO'\right) = A'AB.$$



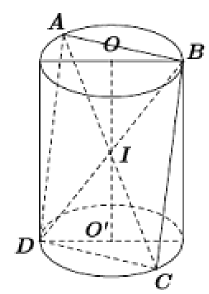
+ Khoảng cách giữa AB và trục OO':

$$d\left(AB;OO'\right) = OM.$$



+ Nếu $ABCD$ là một hình vuông nội tiếp trong hình trụ thì đường chéo của hình vuông cũng bằng đường chéo của hình trụ.

Nghĩa là cạnh hình vuông: $AB\sqrt{2} = \sqrt{4R^2 + h^2}$.

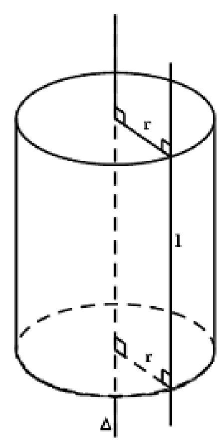


Dạng 4. Xác định mối liên hệ giữa diện tích xung quanh, toàn phần và thể tích khối trụ trong bài toán tối ưu

Một khối trụ có thể tích V không đổi.

+ Tìm bán kính đáy và chiều cao hình trụ để diện tích toàn phần nhỏ nhất:

$$S_{tp}\min \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}} \\ h = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}} \end{cases}$$



+ Tìm bán kính đáy và chiều cao hình trụ để diện tích xung quanh cộng với diện tích 1 đáy và nhỏ nhất:

$$S\min \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}} \\ h = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}} \end{cases}$$

Dạng 5. Hình trụ ngoại tiếp, nội tiếp một hình lăng trụ đứng

+ Cho hình lăng trụ tam giác đều nội tiếp trong một hình trụ. Thể tích khối lăng trụ là V thì thể tích khối trụ là $V_{(T)} = \dfrac{4\pi V}{9}$

+ Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ *ngoại tiếp trong một hình trụ. Diện tích xung quanh hình trụ là S thì diện tích xung quanh của hình lăng trụ là* $S_{xq} = \dfrac{2S}{\pi}$

MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI
BÀI TOÁN MẶT CẦU

I. Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

1/ Các khái niệm cơ bản

+ **Trục của đa giác đáy**: là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đáy ⇒ Bất kì một điểm nào nằm trên trục của đa giác thì cách đều các đỉnh của đa giác đó.
+ **Đường trung trực của đoạn thẳng**: là đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó ⇒ Bất kì một điểm nào nằm trên đường trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.
+ **Mặt trung trực của đoạn thẳng**: là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó ⇒ Bất kì một điểm nào nằm trên mặt trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

2/ Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

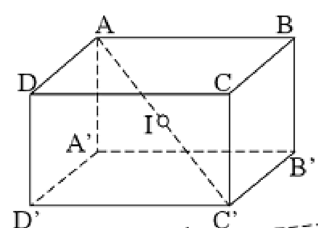
+ **Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp**: là điểm cách đều các đỉnh của hình chóp. Hay nói cách khác, nó chính là giao điểm I của trục *đường tròn ngoại tiếp mặt phẳng đáy* và *mặt phẳng trung trực của một cạnh bên* hình chóp.
+ **Bán kính**: là khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

3/ Cách xác định tâm và bán kính mặt cầu của một số hình đa diện

a/ Hình hộp chữ nhật, hình lập phương.

- **Tâm**: trùng với tâm đối xứng của hình hộp chữ nhật (hình lập phương) ⇒Tâm là I là trung điểm của AC'.
- **Bán kính**: bằng nửa độ dài đường chéo hình hộp chữ nhật (hình lập phương).

⇒Bán kính: $R = \dfrac{AC'}{2}$.



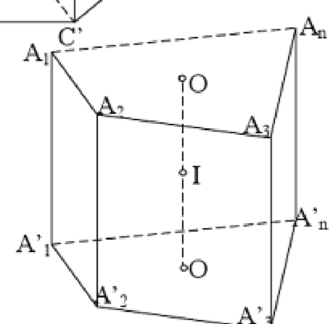
b/ Hình lăng trụ đứng có đáy nội tiếp đường tròn.

Xét hình lăng trụ đứng $A_1A_2A_3...A_n.A'_1A'_2A'_3...A'_n$,

trong đó có 2 đáy $A_1A_2A_3...A_n$ và $A'_1A'_2A'_3...A'_n$ nội tiếp đường tròn (O) và (O'). Lúc đó,

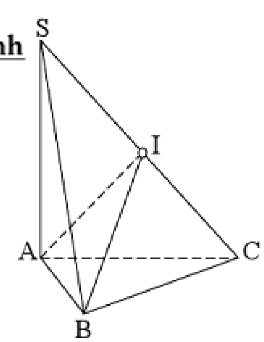
mặt cầu nội tiếp hình lăng trụ đứng có:

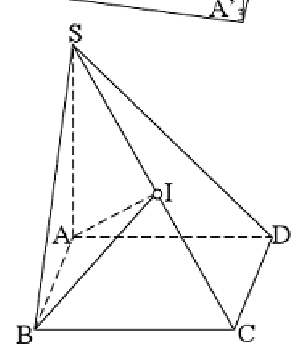
- **Tâm**: I với I là trung điểm của OO'.
- **Bán kính**: $R = IA_1 = IA_2 = ... = IA'_n$.



c/ Hình chóp có các đỉnh nhìn đoạn thẳng nối 2 đỉnh còn lại dưới 1 góc vuông.

- Hình chóp $S.ABC$ có $SAC = SBC = 90^0$.
  + Tâm: I là trung điểm của SC.
  + Bán kính: $R = \dfrac{SC}{2} = IA = IB = IC$.



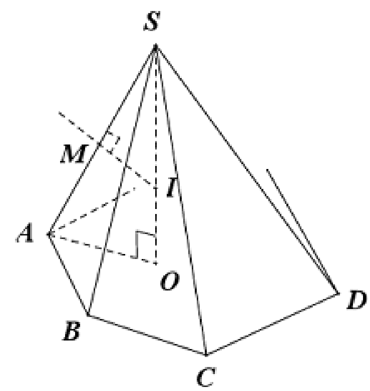


- Hình chóp $S.ABCD$ có $SAC = SBC = SDC = 90^0$.
  + Tâm: I là trung điểm của SC.
  + Bán kính: $R = \frac{SC}{2} = IA = IB = IC = ID$.

d/ <u>Hình chóp đều</u>.

Cho hình chóp đều $S.ABC...$

- Gọi O là tâm của đáy $\Rightarrow SO$ là trục của đáy.
- Trong mặt phẳng xác định bởi SO và một cạnh bên, chẳng hạn như $mp(SAO)$, ta vẽ đường trung trực của cạnh SA là Δ cắt SA tại M và cắt SO tại $I \Rightarrow I$ là tâm của mặt cầu.
- Bán kính:



Ta có: $\Delta SMI \sim \Delta SOA \Rightarrow \frac{SM}{SO} = \frac{SI}{SA} \Rightarrow$ Bán kính là:

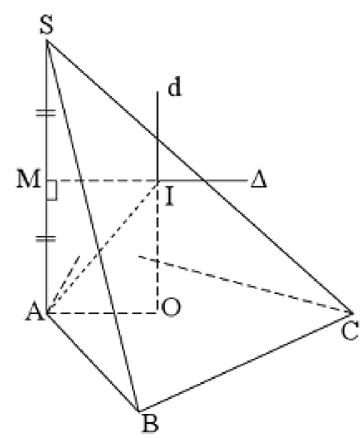
$$R = IS = \frac{SM.SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO} = IA = IB = IC = ...$$

e/ <u>Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy</u>.

Cho hình chóp $S.ABC...$ có cạnh bên $SA \perp$ đáy $(ABC...)$ và đáy $ABC...$ nội tiếp được trong đường tròn tâm O. Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC...$ được xác định như sau:

- Từ tâm O ngoại tiếp của đường tròn đáy, ta vẽ đường thẳng d vuông góc với $mp(ABC...)$ tại O.
- Trong $mp(d, SA)$, ta dựng đường trung trực Δ của cạnh SA, cắt SA tại M, cắt d tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

  và bán kính $R = IA = IB = IC = IS = ...$



- <u>Tìm bán kính</u>:

  Ta có: $MIOB$ là hình chữ nhật.

  Xét ΔMAI vuông tại M có:

$$R = AI = \sqrt{MI^2 + MA^2} = \sqrt{AO^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2}.$$

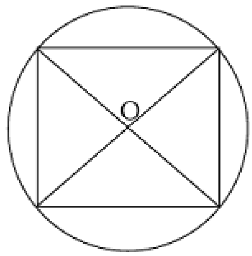
f/ <u>Hình chóp khác</u>.

- Dựng trục Δ của đáy.
- Dựng mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên bất kì.
- $(\alpha) \cap \Delta = I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
- Bán kính: khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

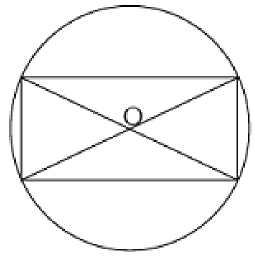
-

g/ Đường tròn ngoại tiếp một số đa giác thường gặp.

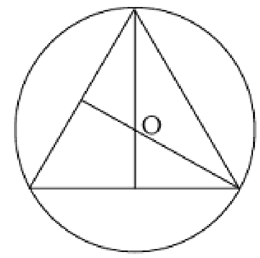
Khi xác định tâm mặt cầu, ta cần xác định trục của mặt phẳng đáy, đó chính là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đáy tại tâm O của đường tròn ngoại tiếp đáy.



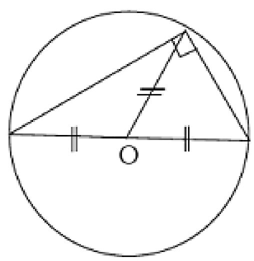
Hình vuông: O là giao điểm 2 đường chéo.



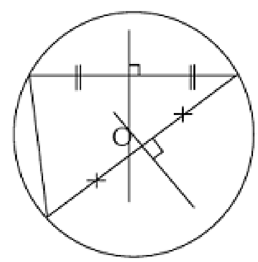
Hình chữ nhật: O là giao điểm của hai đường chéo.



Δ đều: O là giao điểm của 2 đường trung tuyến (trọng tâm).



Δ vuông: O là trung điểm của cạnh huyền.



Δ thường: O là giao điểm của hai đường trung trực của hai cạnh Δ.

II. KỸ THUẬT XÁC ĐỊNH MẶT CẦU NGOẠI TIẾP CHÓP

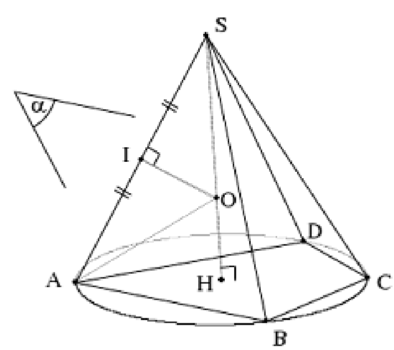
Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ (thoả mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp). *Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước:*

<u>**Bước 1**</u>: Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Dựng Δ: trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

<u>**Bước 2**</u>: Lập mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên.

Lúc đó : - Tâm O của mặt cầu: $\Delta \cap mp(\alpha) = \{O\}$

- Bán kính: $R = SA\left(= SO\right)$. Tuỳ vào từng trường hợp.

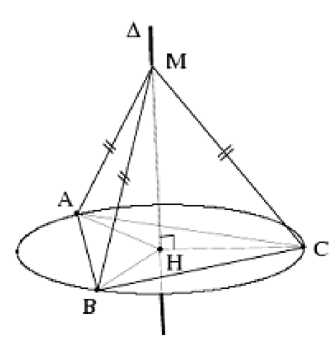


Lưu ý: Kỹ năng xác định trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

1. Trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy: là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với mặt phẳng đáy.

Tính chất: $\forall M \in \Delta$: $MA = MB = MC$

Suy ra: $MA = MB = MC \Leftrightarrow M \in \Delta$

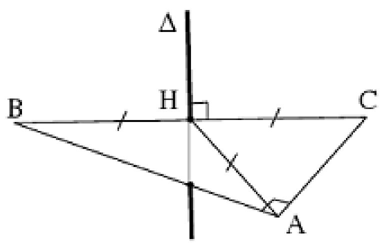


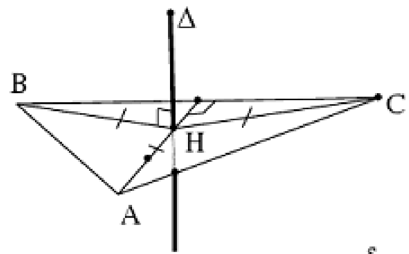
2. Các bước xác định trục:

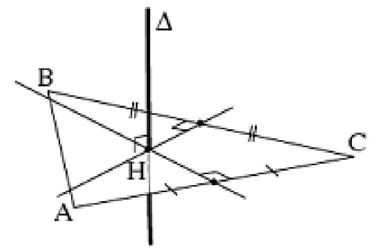
- <u>Bước 1:</u> Xác định tâm H của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.
- <u>Bước 2:</u> Qua H dựng Δ vuông góc với mặt phẳng đáy.

Một số trường hợp đặc biệt

Tam giác vuông Tam giác đều Tam giác bất kì

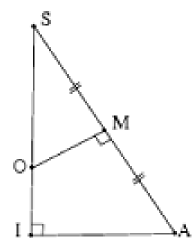






3. Kỹ năng tam giác đồng dạng

ΔSMO đồng dạng với $\Delta SIA \Rightarrow \dfrac{SO}{SA} = \dfrac{SM}{SI}$.



4. Nhận xét:

$\exists M, S : \begin{cases} MA = MB = MC \\ SA = SB = SC \end{cases} \Rightarrow SM$ là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

*** KỸ THUẬT SỬ DỤNG HAI TRỤC XÁC ĐỊNH TÂM MẶT CẦU NGOẠI TIẾP ĐA DIỆN**

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ (thõa mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp). **Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước:**

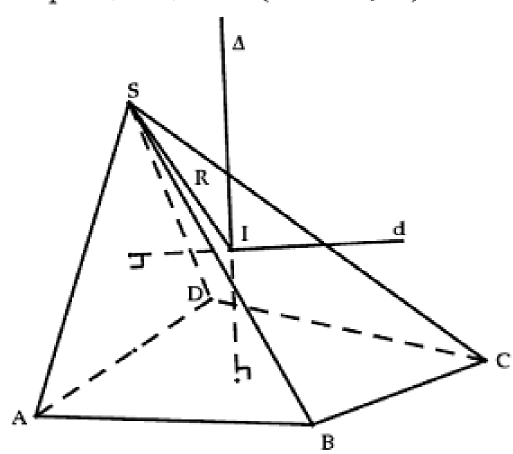
Bước 1: Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Dựng Δ: trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

Bước 2: Xác định trục d của đường tròn ngoại tiếp một mặt bên (*dễ xác định*) của khối chóp.

Lúc đó:

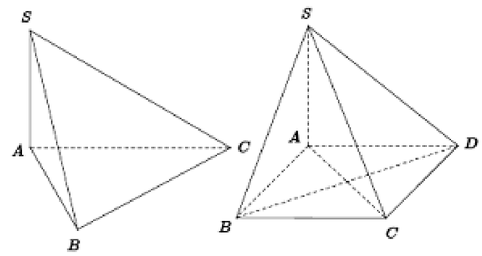
+ Tâm I của mặt cầu: $\Delta \cap d = \{I\}$

+ Bán kính: $R = IA(= IS)$. *Tuỳ vào từng trường hợp.*



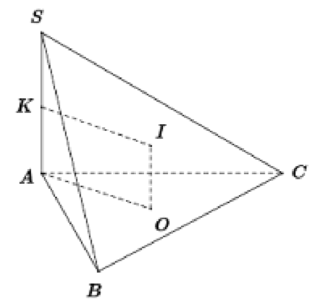
TỔNG KẾT CÁC DẠNG TÌM TÂM VÀ BÁN KÍNH MẶT CẦU (ĐTD)

Loại 1: Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $ABC = 90^0$ khi đó $\boxed{R = \dfrac{SC}{2}}$ và tâm là trung điểm SC.



Loại 2: Cạnh bên SA vuông góc đáy và bất kể đáy là hình gì, chỉ cần tìm được bán kính đường tròn ngoại tiếp của đáy là R_D,

khi đó : $\boxed{R^2 = R_D^2 + \dfrac{SA^2}{4}}$.



+ $\boxed{R_D = \dfrac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}}$ (p: nửa chu vi).

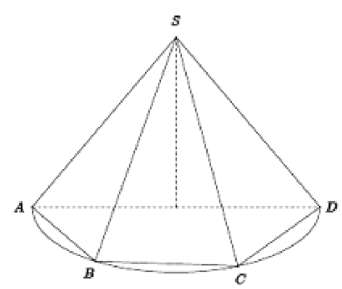
+ Nếu $\Delta\ ABC$ vuông tại A thì: $\boxed{R^2 = \dfrac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 + AS^2\right)}$.

+ Đáy là hình vuông cạnh a thì $R_D = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, nếu đáy là tam giác đều cạnh a thì $R_D = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Loại 3: Chóp có các cạnh bên bằng nhau:

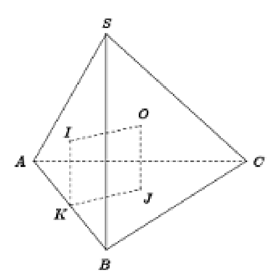
$SA = SB = SC = SD$: $\boxed{R = \dfrac{SA^2}{2SO}}$.

+ $ABCD$ là hình vuông, hình chữ nhật, khi đó O là giao hai đường chéo.
+ ΔABC vuông, khi đó O là trung điểm cạnh huyền.
+ ΔABC đều, khi đó O là trọng tâm, trực tâm.



Loại 4: Hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) vuông góc với nhau và có giao tuyến AB. Khi đó ta gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác SAB và ABC. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp:

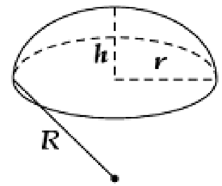
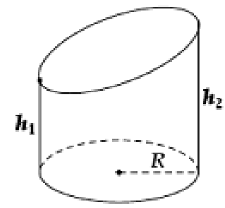
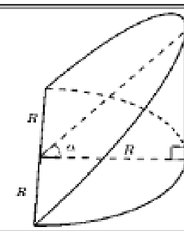
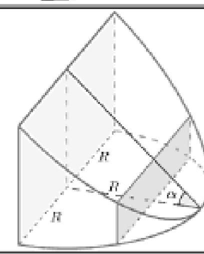
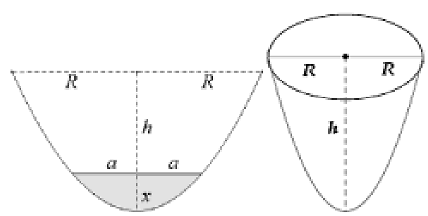
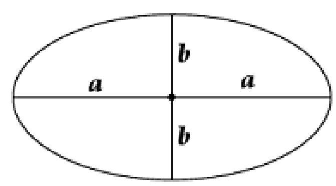
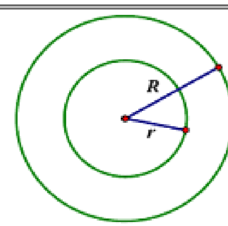
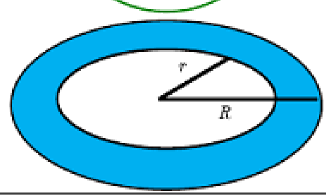
$$\boxed{R^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4}}$$



Loại 5 : Chóp $S.ABCD$ có đường cao SH, tâm đường tròn ngoại tiếp đáy là O. Khi đó ta giải phương trình: $(SH-x)^2 + OH^2 = x^2 + R_D^2$. Với giá trị x tìm được ta có: $\boxed{R^2 = x^2 + R_D^2}$.

Loại 6: Bán kính mặt cầu nội tiếp: $\boxed{r = \dfrac{3V}{S_{tp}}}$.

TỔNG HỢP CÁC CÔNG THỨC ĐẶC BIỆT VỀ KHỐI TRÒN XOAY

Chỏm cầu:	$\begin{cases} S_{xq} = 2\pi Rh = \pi\left(r^2 + h^2\right) \\ V = \pi h^2\left(R - \dfrac{h}{3}\right) = \dfrac{\pi h}{6}\left(h^2 + 3r^2\right) \end{cases}$	
Hình trụ cụt: ***(phiến trụ)***	$\begin{cases} S_{xq} = \pi R\left(h_1 + h_2\right) \\ V = \pi R^2\left(\dfrac{h_1 + h_2}{2}\right) \end{cases}$	
Hình nêm loại 1:	$V = \dfrac{2}{3}R^3 \tan\alpha$	
Hình nêm loại 2:	$V = \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{3}\right)R^3 \tan\alpha$	
Parabol bậc hai. Parabol tròn xoay.	$\begin{cases} S_{parabol} = \dfrac{4}{3}Rh; \ \dfrac{S'}{S} = \left(\sqrt{\dfrac{x}{h}}\right)^3 = \left(\dfrac{a}{R}\right)^3 \\ V = \dfrac{1}{2}\pi R^2 h = \dfrac{1}{2}V_{trụ} \end{cases}$	
Diện tích Elip và Thể tích khối tròn xoay sinh bởi Elip	$\begin{cases} S_{elip} = \pi ab \\ V_{xoay\ quanh\ 2a} = \dfrac{4}{3}\pi ab^2 \\ V_{xoay\ quanh\ 2b} = \dfrac{4}{3}\pi a^2 b \end{cases}$	
Hình xuyến	Diện tích hình vành khăn $S = \pi\left(R^2 - r^2\right)$ Thể tích hình xuyến (phao) $V = 2\pi^2\left(\dfrac{R + r}{2}\right)\left(\dfrac{R - r}{2}\right)^2$	 

PHẦN VII. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN OXYZ

A. HỆ TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN

WEBSITE
giainhanh.live.edu.vn

1. Trong không gian cho ba trục Ox, Oy, Oz phân biệt và vuông góc từng đôi một.
Gốc tọa độ O, trục hoành Ox, trục tung Oy, trục cao Oz, các mặt tọa độ Oxy, Oyz, Ozx.
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vecto đơn vị

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$$

Chú ý: $\vec{a}^2 = \left|\vec{a}\right|^2$

$$\vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{j}\vec{k} = 0$$

2. Tọa độ véc tơ: $\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u}(x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

3. Tọa độ điểm: $M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

4. Các công thức tọa độ cần nhớ: Cho $\vec{u} = (a; b; c)$, $\vec{v} = (a'; b'; c')$

a) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{cases}$

b) $\vec{u} \mp \vec{v} = \left(a \pm a'; b \pm b'; c \pm c'\right)$

c) $k\vec{u} = (ka; kb; kc)$

d) $\vec{u}.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos(\vec{u},\vec{v}) = aa' + bb' + cc'$

e) $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|} = \dfrac{aa' + bb' + cc'}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}$

f) $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

g) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

h) $\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\right)$

i) $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}$

5. Chú ý: góc của 2 véc tơ $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ là góc hình học (nhỏ) giữa 2 tia mang vectơ có giá trị trong đoạn $\left[0; \pi\right]$. $\sin\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\vec{u}, \vec{v}\right)} \geq 0$

6. <u>Chia tỉ lệ đoạn thẳng</u>: M chia AB theo tỉ số k nghĩa là $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$

Công thức tọa độ của M là : $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1 - k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1 - k} \\ z_M = \dfrac{z_A - kz_B}{1 - k} \end{cases}$

M là trung điểm AB: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$

7. <u>G là trọng tâm tam giác ABC:</u>

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}$$

8. <u>G là trọng tâm tứ diện ABCD:</u>

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \end{cases}$$

9. <u>Tích có hướng 2 véc tơ:</u> Cho 2 véc tơ $\vec{u}=(a;b;c)$ và $\vec{v}=(a';b';c')$ ta định nghĩa tích có hướng của 2 véc tơ đó là một véc tơ, kí hiệu $\left[\vec{u},\vec{v}\right]$ hay $\vec{u}\wedge\vec{v}$ có toạ độ:

$$\left[\vec{u},\vec{v}\right]=\left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix};\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\right)=\left(bc'-b'c;ca'-ac';ab'-ba'\right)$$

10. <u>Tính chất tích có hướng 2 véc tơ:</u>

a. $\left[\vec{u},\vec{v}\right]$ vuông góc với $\vec{u}$ và $\vec{v}$

b. $\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right|=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\sin(\vec{u},\vec{v})$

c. $\left[\vec{u},\vec{v}\right]=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{u},\vec{v}$ cùng phương

11. <u>Ứng dụng tích có hướng 2 véc tơ:</u>

a. <u>Diện tích hình bình hành ABCD</u>: $S=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|$

b. <u>Diện tích tam giác ABC:</u> $S=\dfrac{1}{2}.\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$

c. Ba véc tơ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ <u>đồng phẳng:</u> $\left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{w}=0$

d. <u>Thể tích khối hộp</u> có đáy hình bình hành *ABCD* và cạnh bên *AA'*: $V=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$

e. <u>Thể tích khối tứ diện S.ABC:</u> $V=\dfrac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{SA}\right|$

MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

VẤN ĐỀ 1: Các phép toán về toạ độ của vectơ và của điểm

– Sử dụng các công thức về toạ độ của vectơ và của điểm trong không gian.

– Sử dụng các phép toán về vectơ trong không gian.

VẤN ĐỀ 2: Xác định điểm trong không gian. Chứng minh tính chất hình học. Diện tích – Thể tích.

– Sử dụng các công thức về toạ độ của vectơ và của điểm trong không gian.

– Sử dụng các phép toán về vectơ trong không gian.

– Công thức xác định toạ độ của các điểm đặc biệt.

– Tính chất hình học của các điểm đặc biệt:

- A, B, C *thẳng hàng* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ *cùng phương* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \vec{0}$
- $ABCD$ *là hình bình hành* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- *Cho* ΔABC *có các chân* E, F *của các đường phân giác trong và ngoài của góc* A *của* ΔABC *trên* BC.

Ta có: $\overrightarrow{EB} = -\dfrac{AB}{AC}.\overrightarrow{EC}$, $\quad \overrightarrow{FB} = \dfrac{AB}{AC}.\overrightarrow{FC}$

- A, B, C, D *không đồng phẳng* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ *không đồng phẳng* $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} \neq 0$

VẤN ĐỀ 3: Phương trình mặt cầu

Để viết phương trình mặt cầu (S)*, ta cần xác định tâm* I *và bán kính* R *của mặt cầu.*

Dạng 1: (S) có tâm $I(a;\ b;\ c)$ và bán kính R:

$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Dạng 2: (S) có tâm $I(a;\ b;\ c)$ và đi qua điểm A:

Khi đó bán kính $R = IA$.

Dạng 3: (S) nhận đoạn thẳng AB cho trước làm đường kính:

–Tâm I *là trung điểm của đoạn thẳng* AB:

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2};\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2};\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

– Bán kính $R = IA = \dfrac{AB}{2}$.

Dạng 4: (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D *(mặt cầu ngoại tiếp tứ diện* $ABCD$*)*:

– Giả sử phương trình mặt cầu (S) *có dạng:*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0\ (*).$$

MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

VẤN ĐỀ 1: Các phép toán về toạ độ của vectơ và của điểm

– Sử dụng các công thức về toạ độ của vectơ và của điểm trong không gian.

– Sử dụng các phép toán về vectơ trong không gian.

VẤN ĐỀ 2: Xác định điểm trong không gian. Chứng minh tính chất hình học. Diện tích – Thể tích.

– Sử dụng các công thức về toạ độ của vectơ và của điểm trong không gian.

– Sử dụng các phép toán về vectơ trong không gian.

– Công thức xác định toạ độ của các điểm đặc biệt.

– Tính chất hình học của các điểm đặc biệt:

- A, B, C *thẳng hàng* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ *cùng phương* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \vec{0}$
- $ABCD$ *là hình bình hành* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- *Cho* ΔABC *có các chân* E, F *của các đường phân giác trong và ngoài của góc* A *của* ΔABC *trên* BC.

Ta có: $\overrightarrow{EB} = -\dfrac{AB}{AC}.\overrightarrow{EC}, \quad \overrightarrow{FB} = \dfrac{AB}{AC}.\overrightarrow{FC}$

- A, B, C, D *không đồng phẳng* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ *không đồng phẳng* $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} \neq 0$

VẤN ĐỀ 3: Phương trình mặt cầu

Để viết phương trình mặt cầu (S), *ta cần xác định tâm* I *và bán kính* R *của mặt cầu.*

Dạng 1: (S) có tâm $I(a;\ b;\ c)$ và bán kính R:

$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Dạng 2: (S) có tâm $I(a;\ b;\ c)$ và đi qua điểm A:

Khi đó bán kính $R = IA$.

Dạng 3: (S) nhận đoạn thẳng AB cho trước làm đường kính:

–Tâm I *là trung điểm của đoạn thẳng* AB:

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2};\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2};\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

– Bán kính $R = IA = \dfrac{AB}{2}$.

Dạng 4: (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D *(mặt cầu ngoại tiếp tứ diện* $ABCD$*):*

– Giả sử phương trình mặt cầu (S) *có dạng:*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0\ (*).$$

– Thay lần lượt toạ độ của các điểm $A,\ B,\ C,\ D$ vào $(*)$, ta được 4 phương trình.

– Giải hệ phương trình đó, ta tìm được $a,\ b,\ c,\ d \Rightarrow$ Phương trình mặt cầu (S).

Dạng 5: (S) đi qua ba điểm $A,\ B,\ C$ và có tâm I nằm trên mặt phẳng (P) cho trước: *Giải tương tự như dạng 4.*

Dạng 6: (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt cầu (T) cho trước:

– Xác định tâm J và bán kính R' của mặt cầu (T).

– Sử dụng điều kiện tiếp xúc của hai mặt cầu để tính bán kính R của mặt cầu (S).

(Xét hai trường hợp tiếp xúc trong và tiếp xúc ngoài)

Chú ý: Với phương trình mặt cầu (S):

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

thì (S) *có* tâm $I(-a;-b;-c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

VẤN ĐỀ 4: Vị trí tương đối giữa hai mặt cầu mặt cầu

Cho hai mặt cầu $S_1(I_1,\ R_1)$ và $S_2(I_2,\ R_2)$.

- $I_1I_2 < |R_1 - R_2| \Leftrightarrow (S_1),\ (S_2)$ *trong nhau*
- $I_1I_2 > R_1 + R_2 \Leftrightarrow (S_1),\ (S_2)$ *ngoài nhau*
- $I_1I_2 = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow (S_1),\ (S_2)$ *tiếp xúc trong*
- $I_1I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow (S_1),\ (S_2)$ *tiếp xúc ngoài*
- $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2 \Leftrightarrow (S_1),\ (S_2)$ *cắt nhau theo một đường tròn.*

VẤN ĐỀ 5: Tập hợp điểm là mặt cầu – Tập hợp tâm mặt cầu

1. ***Tập hợp điểm là mặt cầu***

Giả sử tìm tập hợp điểm M thoả tính chất (P) nào đó.

– Tìm hệ thức giữa các toạ độ $x,\ y,\ z$ của điểm M.

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

hoặc: $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$

– Tìm giới hạn quĩ tích (nếu có).

2. ***Tìm tập hợp tâm mặt cầu***

– Tìm toạ độ của tâm I, chẳng hạn: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} \quad (*)$

– Khử t trong $(*)$ ta có phương trình tập hợp điểm.

– Tìm giới hạn quĩ tích (nếu có).

MẶT PHẲNG

1. $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc mp(P) được gọi là véc tơ pháp tuyến của (P).
2. Nếu $\vec{n}$ là véc tơ pháp tuyến của (P) thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là véc tơ pháp tuyến của (P).
3. **<u>Phương trình tổng quát của mp(P):</u>** qua $M(x_0; y_0; z_0)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

4. **<u>Khai triển của phương trình tổng quát:</u>**

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

(A,B,C không đồng thời bằng 0)

5. **<u>Những trường hợp riêng của phương trình tổng quát:</u>**

- (P) qua gốc tọa độ ⇔ D=0
- (P) song song hoặc trùng *(Oxy)* ⇔ *A=B=0*
- (P) song song hoặc trùng *(Oyz)* ⇔ *B=C=0*
- (P) song song hoặc trùng *(Ozx)* ⇔ *A=C=0*
- (P) song song hoặc chứa *Ox* ⇔ *A=0*
- (P) song song hoặc chứa *Oy* ⇔ *B=0*
- (P) song song hoặc chứa Oz ⇔ *C=0*
- (P) cắt Ox tại *A(a;0;0)*, cắt Oy tại *B(0;b;0)* và cắt *Oz* tại *C(0;0;c)*

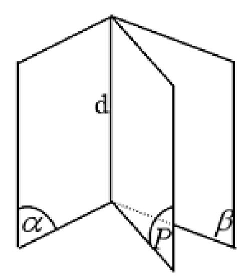
⇔ (P) có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

6. **<u>Khoảng cách từ 1 điểm đến mặt phẳng:</u>**

Cho $M(x_0; y_0; z_0)$ và $(P): Ax + By + Cz + D = 0$; $d(M,(P)) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

8. Chùm mặt phẳng

- Tập hợp tất cả cc mặt phẳng qua giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là một chùm mặt phẳng



- Gọi (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng

$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Khi đó nếu (P) là mặt phẳng chứa (d) thì mặt phẳng (P) có dạng

$(P): m.(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + n.(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad m^2 + n^2 \neq 0$

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

VẤN ĐỀ 1: Viết phương trình mặt phẳng

Để lập phương trình mặt phẳng (α) ta cần xác định một điểm thuộc (α) và một VTPT của nó.

Dạng 1: (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ có VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$:

$$(\alpha): \ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Dạng 2: (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ có cặp VTCP $\vec{a}, \vec{b}$:

Khi đó một VTPT của (α) là $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

Dạng 3: (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và song song với mặt phẳng

$(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$:

$$(\alpha): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Dạng 4: (α) đi qua 3 điểm không thẳng hàng A, B, C

Khi đó ta có thể xác định một VTPT của (α) *là:* $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$

Dạng 5: (α) đi qua một điểm $\mathbf{M}$ và một đường thẳng (d) không chứa $\mathbf{M}$:

– *Trên* (d) *lấy điểm* A *và VTCP* $\vec{u}$.

– *Một VTPT của* (α) *là:* $\vec{n} = [\overrightarrow{AM}, \vec{u}]$

Dạng 6: (α) đi qua một điểm $\mathbf{M}$, vuông góc với đường thẳng (d):

VTCP $\vec{u}$ *của đường thẳng* (d) *là một VTPT của* (α).

Dạng 7: (α) đi qua 2 đường thẳng cắt nhau d_1, d_2:

– *Xác định các VTCP* $\vec{a}, \vec{b}$ *của các đường thẳng* d_1, d_2..

– *Một VTPT của* (α) *là:* $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

– *Lấy một điểm* $\mathbf{M}$ *thuộc* d_1 *hoặc* $d_2 \Rightarrow M \in (\alpha)$.

Dạng 8: (α) chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng $\mathbf{d_2}$(d_1, d_2 *chéo nhau*):

– *Xác định các VTCP* $\vec{a}, \vec{b}$ *của các đường thẳng* d_1, d_2.

– *Một VTPT của* (α) *là:* $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

– *Lấy một điểm* $\mathbf{M}$ *thuộc* $d_1 \Rightarrow M \in (\alpha)$.

Dạng 9: (α) đi qua điểm $\mathbf{M}$ và song song với hai đường thẳng chéo nhau $\mathbf{d_1}$, $\mathbf{d_2}$:

– *Xác định các VTCP* $\vec{a}, \vec{b}$ *của các đường thẳng* d_1, d_2.

– *Một VTPT của* (α) *là:* $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

Dạng 10: (α) đi qua một đường thẳng $(\mathbf{d})$ và vuông góc với một mặt phẳng (β):

– *Xác định VTCP* $\vec{u}$ *của* $(\mathbf{d})$ *và VTPT* $\vec{n}_\beta$ *của* (β).

– *Một VTPT của* (α) *là:* $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{n}_\beta]$.

– *Lấy một điểm* $\mathbf{M}$ *thuộc* $d \Rightarrow M \in (\alpha)$.

Dạng 11: (α) đi qua điểm $\mathbf{M}$ và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau (β), (γ):

– *Xác định các VTPT* $\vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma$ *của* (β) *và* (γ).

– *Một VTPT của* (α) *là:* $\vec{n} = [\vec{u}_\beta, \vec{n}_\gamma]$.

Dạng 12: (α) đi qua đường thẳng $(\mathbf{d})$ cho trước và cách điểm $\mathbf{M}$ cho trước một khoảng k cho trước:

– *Giả sử* (α) *có phương trình:* $Ax + By + Cz + D = 0$ $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$.

– *Lấy 2 điểm* A, $B \in (d) \Rightarrow A$, $B \in (\alpha)$ (*ta được hai phương trình* (1), (2)).

– Từ điều kiện khoảng cách $d(M,(\alpha)) = k$, ta được phương trình (3).

– Giải hệ phương trình (1), (2), (3) (bằng cách cho giá trị một ẩn, tìm các ẩn còn lại).

Dạng 13: (α) là tiếp xúc với mặt cầu $(\mathbf{S})$ tại điểm H :

– Giả sử mặt cầu $(\mathbf{S})$ có tâm I và bán kính R.

– Một VTPT của (α) là: $\vec{n} = \overrightarrow{IH}$

VẤN ĐỀ 2: Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ và $(P'): A'x+B'y+C'z+D'=0$.

Khi đó: (P) cắt $(P') \Leftrightarrow A:B:C \neq A':B':C'$.

$(P) \,//\, (P') \Leftrightarrow \dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} \neq \dfrac{D}{D'}$.

$(P) \equiv (P') \Leftrightarrow \dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} = \dfrac{D}{D'}$.

$(P) \perp (P') \Leftrightarrow \vec{n}_{(P)} \perp \vec{n}_{(P')} \Leftrightarrow \vec{n}_{(P)}.\vec{n}_{(P')} = 0 \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0$.

VẤN ĐỀ 3: Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song.

Hình chiếu của một điểm trên mặt phẳng .

Điểm đối xứng của một điểm qua mặt phẳng.

• *Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ đến mặt phẳng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$*

$$d(M_0,(\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

• *Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.*

Chú ý: Nếu hai mặt phẳng không song song thì khoảng cách giữa chúng bằng 0.

• *Điểm H là hình chiếu của điểm M trên $(P) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MH}, \vec{n} \text{ cung phuong} \\ H \in (P) \end{cases}$*

• *Điểm M' đối xứng với điểm M qua $(P) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$*

VẤN ĐỀ 4: Góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (α), (β) có phương trình:

$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Góc giữa (α), (β) bằng hoặc bù với góc giữa hai VTPT $\vec{n}_1, \vec{n}_2$.

$$\cos((\alpha),(\beta)) = \frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Chú ý: $0^0 \leq ((\alpha),(\beta)) \leq 90^0$; $(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

VẤN ĐỀ 5: Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu.
Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu

Cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ *và mặt cầu* $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

- (α) *và* (S) *không có điểm chung* $\Leftrightarrow d(I,(\alpha)) > R$
- (α) *tiếp xúc với* (S) $\Leftrightarrow d(I,(\alpha)) = R$ (α) *là tiếp diện*

Để tìm toạ độ tiếp điểm ta có thể thực hiện như sau:

– *Viết phương trình đường thẳng* d *đi qua tâm* I *của* (S) *và vuông góc với* (α).

– *Tìm toạ độ giao điểm* H *của* d *và* (α). H *là tiếp điểm của* (S) *với* (α).

- (α) *cắt* (S) *theo một đường tròn* $\Leftrightarrow d(I,(\alpha)) < R$

Để xác định tâm H *và bán kính* r *của đường tròn giao tuyến ta có thể thực hiện như sau:*

– *Viết phương trình đường thẳng* d *đi qua tâm* I *của* (S) *và vuông góc với* (α).

– *Tìm toạ độ giao điểm* H *của* d *và* (α).

H *là tâm của đường tròn giao tuyến của* (S) *với* (α).

Bán kính r *của đường tròn giao tuyến:* $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$

ĐƯỜNG THẲNG

I. Phương trình của đường thẳng:

1) Vect chỉ phương của đường thẳng:

Định nghĩa: Cho đường thẳng d. Nếu vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với đường phẳng d thì vect $\vec{a}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường phẳng d. Kí hiệu: $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$

☞ **Chú ý:**

1) $\vec{a}$ là VTCP của d thì $k.\vec{a}$ $(k \neq 0)$ cũng là VTCP của d

2) Nếu d đi qua hai điểm A, B thì $\overrightarrow{AB}$ là một VTCP của d

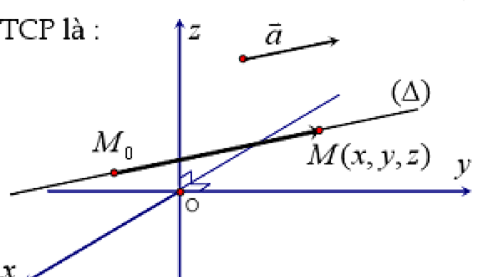
3) Trục Ox có vectơ chỉ phương $\vec{a} = \vec{i} = (1;0;0)$

4) Trục Oy có vectơ chỉ phương $\vec{a} = \vec{j} = (0;1;0)$

5) Trục Oz có vectơ chỉ phương $\vec{a} = \vec{k} = (0;0;1)$

2.Phương trình tham số của đường thẳng:

Phương trình tham số của đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ làm VTCP là :



$$(\Delta): \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

3. Phương trình chính tắc của đường thẳng:

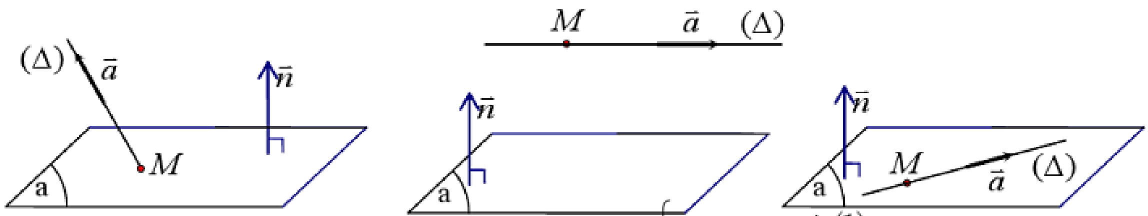
Phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ làm VTCP là :

$$(\Delta): \frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

II. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng :

1.Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng :

PP HÌNH HỌC



Định lý: Trong $Kg(Oxyz)$ cho: đường thẳng $(\Delta): \begin{cases} x=x_0+a_1t \ (1) \\ y=y_0+a_2t \ (2) \\ z=z_0+a_3t \ (3) \end{cases}$ có VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$

và qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$

Khi đó :

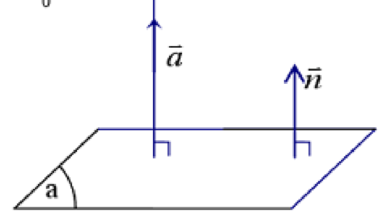
$$(\Delta) \ cat \ (\alpha) \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{n}\neq 0 \Leftrightarrow Aa_1+Ba_2+Ca_3\neq 0$$

$$(\Delta) \ // \ (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n}=0 \\ M_0\notin(P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1+Ba_2+Ca_3=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0 \end{cases}$$

$$(\Delta) \subset (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n}=0 \\ M_0\in(P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1+Ba_2+Ca_3=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases}$$

Đặc biệt: $(\Delta)\perp(\alpha) \Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{n}$ cùng phương

$\Leftrightarrow a_1:a_2:a_3=A:B:C$



PP ĐẠI SỐ: Muốn tìm giao điểm M của (Δ) và (α) ta giải hệ phương trình: $\begin{cases} pt(\Delta) \\ pt(\alpha) \end{cases}$ tìm x,y,z.

Suy ra: $M(x,y,z)$

Thế $(1),(2),(3)$ vào phương trình $mp(P)$ và rút gọn đưa về dạng: $at+b=0$ (*)

- d cắt $mp(P)$ tại một điểm $\Leftrightarrow Pt$ $(*)$ có một nghiệm t.
- d song song với $(P)\Leftrightarrow Pt$ $(*)$ vô nghiệm.
- d nằm trong $(P)\Leftrightarrow Pt$ $(*)$ có vô số nghiệm t.
- d vuông góc $(P)\Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{n}$ cùng phương

2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng:

PP HÌNH HỌC

Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

Cho hai đường thẳng: Δ_1 đi qua M và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_1$.

Δ_2 đi qua N và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_2$.

+ $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] = \left[\vec{u}_1, \overrightarrow{MN}\right] = \vec{0}$.

+ $\Delta_1 \,//\, \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] = \vec{0} \\ \left[\vec{u}_1, \overrightarrow{MN}\right] \neq \vec{0} \end{cases}$.

+ Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right] \neq \vec{0} \\ \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right].\overrightarrow{MN} = 0 \end{cases}$.

+ Δ_1 và Δ_2 chéo nhau $\Leftrightarrow \left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right].\overrightarrow{MN} \neq 0$.

PP ĐẠI SỐ: Muốn tìm giao điểm M của (Δ_1) va (Δ_2) ta giải hệ phương trình : $\begin{cases} pt(\Delta_1) \\ pt(\Delta_2) \end{cases}$ tìm x, y, z. Suy ra: $M\left(x, y, z\right)$

3) Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu:

Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \ (1) \\ y = y_0 + a_2 t \ (2) \\ z = z_0 + a_3 t \ (3) \end{cases}$ và mặt cầu $\left(S\right): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ có tâm $I(a;b;c)$, bán kính R.

PP HÌNH HỌC

B1. Tính khoảng cách từ tâm I của mặt cầu $\left(S\right)$ đến đường thẳng d là $h = d(I,d) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM_0}.\vec{a}\right]\right|}{\left|\vec{a}\right|}$

B2. So sánh $d(I,d)$ với bán kính R của mặt cầu:

- Nếu $d(I,d) > R$ thì d không cắt $\left(S\right)$
- Nếu $d(I,d) = R$ thì d tiếp xúc $\left(S\right)$
- Nếu $d(I,d) < R$ thì d cắt $\left(S\right)$ tại hai điểm phân biệt $M,\ N$ và MN vuông góc với đường kính (bán kính) mặt cầu

PP ĐẠI SỐ: Thế $\left(1\right)$, $\left(2\right)$, $\left(3\right)$ vào phương trình $\left(S\right)$ và rút gọn đưa về phương trình bậc hai theo t $\left(*\right)$

- Nếu phương trình $\left(*\right)$ vô nghiệm thì d khong cắt $\left(S\right)$
- Nếu phương trình $\left(*\right)$ có một nghiệm thì d tiếp xc $\left(S\right)$
- Nếu phương trình $\left(*\right)$ có hai nghiệm thì d cắt $\left(S\right)$ tại hai điểm phân biệt $M,\ N$

Chú ý: Để tìm tọa độ $M,\ N$ ta thay giá trị t vào phương trình đường thẳng d

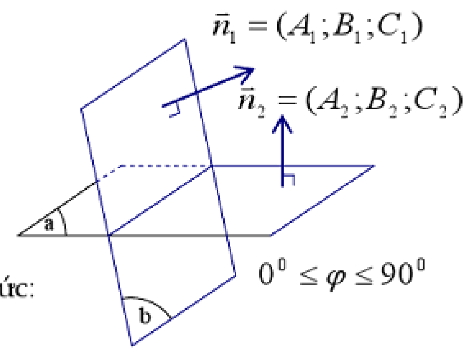
III. Góc trong không gian:

1. Góc giữa hai mặt phẳng:

Định lý: Trong $Kg\left(Oxyz\right)$ cho hai mặt phẳng α, β xác định bởi phương trình :

$$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) & (β) ta có công thức:



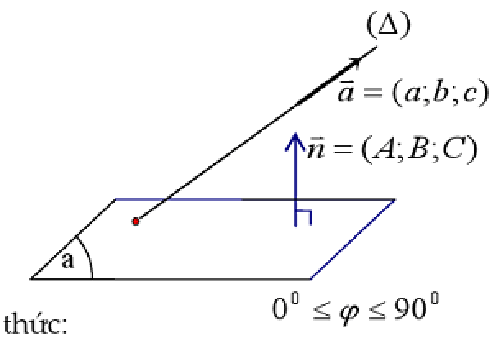
$$\cos\varphi = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

Cho đường thẳng $(\Delta): \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$

và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (Δ) & (α) ta có công thức:



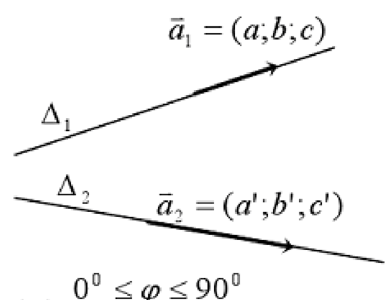
$$\sin\varphi = \frac{\left|Aa + Bb + Cc\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

WEBSITE
giainhanh.live.edu.vn

3.Góc giữa hai đường thẳng :

Cho hai đường thẳng :

$$(\Delta_1): \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$
$$(\Delta_2): \frac{x - x_0}{a'} = \frac{y - y_0}{b'} = \frac{z - z_0}{c'}$$



Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (Δ_1) & (Δ_2) ta có công thức:

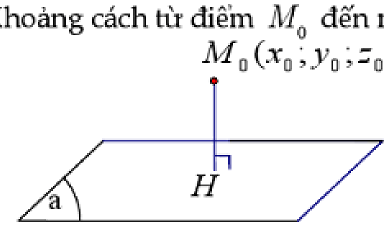
$$\cos\varphi = \frac{\left|aa' + bb' + cc'\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

IV. Khoảng cách:

1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng:

Cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$

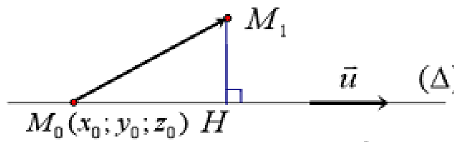
Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính bởi :



$$d(M_0;\Delta) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

2. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng:

Cho đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$. Khi đó khoảng cách từ điểm M1 đến (Δ) được tính bởi công thức:



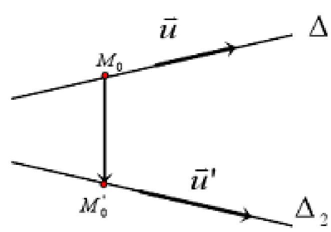
$$d(M_1,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1};\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

Định lý: Trong $Kg(Oxyz)$ cho hai đường thẳng chéo nhau :

$$(\Delta_1)\ co\ VTCP\ \vec{u}=(a;b;c)\ va\ qua\ M_0(x_0;y_0;z_0)$$
$$(\Delta_2)\ co\ VTCP\ \vec{u'}=(a';b';c')\ va\ qua\ M_0'(x_0';y_0';z_0')$$

Khi đó khoảng cách giữa (Δ_1) va (Δ_2) được tính bởi công thức $d(\Delta_1,\Delta_2)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\vec{u}'\right].\overrightarrow{M_0M_0'}\right|}{\left|\left[\vec{u};\vec{u}'\right]\right|}$



CÁC DẠNG THƯỜNG GẶP

VẤN ĐỀ 1: Lập phương trình đường thẳng

Để lập phương trình đường thẳng d ta cần xác định một điểm thuộc d và một VTCP của nó.

Dạng 1: d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$:

$$(d):\begin{cases}x=x_o+a_1t\\ y=y_o+a_2t\\ z=z_o+a_3t\end{cases}\quad (t\in R)$$

Dạng 2: d đi qua hai điểm A, B : *Một VTCP của d là $\overrightarrow{AB}$.*

Dạng 3: d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và song song với đường thẳng Δ cho trước: *Vì $d\,//\,\Delta$ nên VTCP của Δ cũng là VTCP của d.*

Dạng 4: d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước: *Vì $d\perp(P)$ nên VTPT của (P) cũng là VTCP của d.*

Dạng 5: d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\mathbf{P})$, $(\mathbf{Q})$:

• *Cách 1: Tìm một điểm và một VTCP.*

– *Tìm toạ độ một điểm $A\in d$: bằng cách giải hệ phương trình $\begin{cases}(P)\\(Q)\end{cases}$ (với việc chọn giá trị cho một ẩn)*

– *Tìm một VTCP của d: $\vec{a}=\left[\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right]$*

• *Cách 2: Tìm hai điểm A, B thuộc d, rồi viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm đó.*

Dạng 6: d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với hai đường thẳng d_1,d_2 :

Vì $d \perp d_1$, $d \perp d_2$ nên một VTCP của d là: $\vec{a} = \left[\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}\right]$

Dạng 7: d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$, vuông góc và cắt đường thẳng Δ.

• *Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M_0 trên đường thẳng Δ.*

$$\begin{cases} H \in \Delta \\ \overrightarrow{M_0H} \perp \vec{u}_\Delta \end{cases}$$

Khi đó đường thẳng d là đường thẳng đi qua M_0, H.

• *Cách 2: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d; (Q) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Khi đó $d = (P) \cap (Q)$*

Dạng 8: d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2:

• *Cách 1: Gọi $M_1 \in d_1$, $M_2 \in d_2$. Từ điều kiện M, M_1, M_2 thẳng hàng ta tìm được M_1, M_2. Từ đó suy ra phương trình đường thẳng d.*

• *Cách 2: Gọi $(P) = (M_0, d_1)$, $(Q) = (M_0, d_2)$. Khi đó $d = (P) \cap (Q)$. Do đó, một VTCP của d có thể chọn là $\vec{a} = \left[\vec{n}_P, \vec{n}_Q\right]$.*

Dạng 9: d nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2: *Tìm các giao điểm $A = d_1 \cap (P)$, $B = d_2 \cap (P)$. Khi đó d chính là đường thẳng AB.*

Dạng 10: d song song với Δ và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2:

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ và d_1, mặt phẳng (Q) chứa Δ và d_2. Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

Dạng 11: d là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau:

• *Cách 1: Gọi $M_1 \in d_1$, $M_2 \in d_2$. Từ điều kiện $\begin{cases} MN \perp d_1 \\ MN \perp d_2 \end{cases}$, ta tìm được M, N. Khi đó, d là đường thẳng MN.*

• *Cách 2:*

– *Vì $d \perp d_1$ và $d \perp d_2$ nên một VTCP của d có thể là: $\vec{a} = \left[\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}\right]$.*

– *Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d và d_1, bằng cách:*

+ *Lấy một điểm A trên d_1.*

+ *Một VTPT của (P) có thể là: $\vec{n}_P = \left[\vec{a}, \vec{a}_{d_1}\right]$.*

– *Tương tự lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa d và d_2.*

Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

Dạng 12: d là hình chiếu của đường thẳng Δ lên mặt phẳng $(\mathbf{P})$:

• *Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (P) bằng cách:*

– *Lấy $M \in \Delta$.*

– *Vì (Q) chứa Δ và vuông góc với (P) nên $\vec{n}_Q = \left[\vec{a}_\Delta, \vec{n}_P\right]$.*

Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

Dạng 13: d đi qua điểm $\mathbf{M}$, vuông góc với d_1 và cắt d_2 :

• *Cách 1: Gọi* N *là giao điểm của d và* d_2. *Từ điều kiện* $MN \perp d_1$, *ta tìm được* N. *Khi đó, d là đường thẳng* MN.

• *Cách 2:*

– *Viết phương trình mặt phẳng* (P) *qua* M *và vuông góc với* d_1.

– *Viết phương trình mặt phẳng* (Q) *chứa* M *và* d_2.

Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

VẤN ĐỀ 2: Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Để xét VTTĐ giữa hai đường thẳng, ta có thể sử dụng một trong các phương pháp sau:

• *Phương pháp hình học: Dựa vào mối quan hệ giữa các VTCP và các điểm thuộc các đường thẳng.*

• *Phương pháp đại số: Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình các đường thẳng.*

VẤN ĐỀ 3: Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Để xét VTTĐ giữa đường thẳng và mặt phẳng, ta có thể sử dụng một trong các phương pháp sau:

• *Phương pháp hình học: Dựa vào mối quan hệ giữa VTCP của đường thẳng và VTPT của mặt phẳng.*

• *Phương pháp đại số: Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình đường thẳng và mặt phẳng.*

VẤN ĐỀ 4: Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Để xét VTTĐ giữa đường thẳng và mặt cầu ta có thể sử dụng các phương pháp sau:

• *Phương pháp hình học: Dựa vào khoảng cách từ tâm mặt cầu đến đường thẳng và bán kính.*

• *Phương pháp đại số: Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình đường thẳng và mặt cầu.*

VẤN ĐỀ 5: Khoảng cách

1. *Khoảng cách từ điểm* M *đến đường thẳng* d

• *Cách 1: Cho đường thẳng d đi qua* M_0 *và có VTCP* $\vec{a}$.

$$d(M,d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}\right]\right|}{|\vec{a}|}$$

• *Cách 2:* – *Tìm hình chiếu vuông góc* H *của* M *trên đường thẳng* d.

– $d(M,d) = MH$.

• *Cách 3:* – *Gọi* $N(x;\ y;\ z) \in d$. *Tính* MN^2 *theo* t *(t tham số trong phương trình đường thẳng* d*).*

– *Tìm* t *để* MN^2 *nhỏ nhất.*

– *Khi đó* $N \equiv H$. *Do đó* $d(M,d) = MH$.

2. *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau*

Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1 *và* d_2. *Biết* d_1 *đi qua điểm* M_1 *và có VTCP* $\vec{a}_1$, d_2 *đi qua điểm* M_2

và có VTCP $\vec{a}_2$ $$d(d_1,d_2)=\frac{\left|\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2\right]\right|}$$

Chú ý: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 *bằng khoảng cách giữa* d_1 *với mặt phẳng* (α) *chứa* d_2 *và song song với* d_1.

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

4. Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa đường thẳng d với mặt phẳng (α) *song song với nó bằng khoảng cách từ một điểm* M *bất kì trên d đến mặt phẳng* (α).

VẤN ĐỀ 6: Góc

1. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng d_1, d_2 *lần lượt có các VTCP* $\vec{a}_1,\vec{a}_2$.

Góc giữa d_1, d_2 *bằng hoặc bù với góc giữa* $\vec{a}_1,\vec{a}_2$.

$$\cos\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2\right)=\frac{\left|\vec{a}_1.\vec{a}_2\right|}{\left|\vec{a}_1\right|.\left|\vec{a}_2\right|}$$

2. Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng

Cho đường thẳng d *có VTCP* $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ *và mặt phẳng* (α) *có VTPT* $\vec{n}=(A;B;C)$.*Góc giữa đường thẳng* d *và mặt phẳng* (α) *bằng góc giữa đường thẳng* d *với hình chiếu* d' *của nó trên* (α).

$$\sin\left(d,(\alpha)\right)=\frac{\left|Aa_1+Ba_2+Ca_3\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

MẶT CẦU

I. Phương trình mặt cầu:

1. Phương trình chính tắc:

Phương trình của mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$, bán kính R

là: $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ (1)

Phương trình (1) được gọi là phương trình chính tắc của mặt cầu

Đặc biệt: Khi $I\equiv O$ thì $(C):x^2+y^2+z^2=R^2$

2. Phương trình tổng quát:

Phương trình : $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình của mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

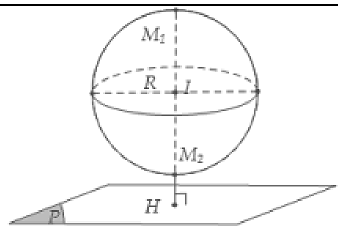
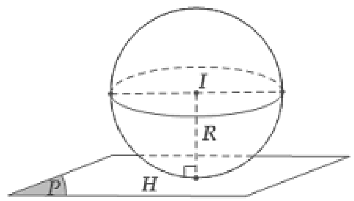
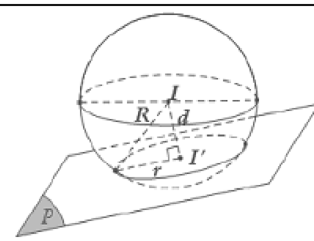
II. Giao của mặt cầu và mặt phẳng:

Cho mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) có phương trình :

$$(\alpha):Ax+By+Cz+D=0$$
$$(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Gọi $d(I;\alpha)$ là khoảng cách từ tâm mặt cầu (S) đến mặt phẳng α

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(P) \Rightarrow d = IH = d(I,(P))$.

$d > R$	$d = R$	$d < R$
Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.	Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. (P) là mặt phẳng **tiếp diện** của mặt cầu và H: **tiếp điểm.**	Mặt phẳng cắt mặt cầu theo thiết diện là *đường tròn* có tâm I' và bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$
		

Dạng 1: (S) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R: $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

Dạng 2: (S) có tâm $I(a;b;c)$ và đi qua điểm A:

Phương pháp: Khi đó bán kính $R = IA$.

Dạng 3: (S) nhận đoạn thẳng AB cho trước làm đường kính:

Phương pháp:

- Tâm I là trung điểm của đoạn thẳng

$$AB:\ x_I = \frac{x_A + x_B}{2};\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2};\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

- Bán kính $R = IA = \dfrac{AB}{2}$.

Dạng 4: (S) đi qua bốn điểm A,B,C,D (mặt cầu ngoại tiếp tứ diện)

Phương pháp:

- Giả sử (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ $(*)$.
- Thay lần lượt toạ độ của các điểm A,B,C,D vào $(*)$, ta được 4 phương trình.
- Giải hệ phương trình đó, ta tìm được $a,b,c,d \Rightarrow$ Phương trình mặt cầu (S).

Dạng 5: (S) đi qua ba điểm A,B,C và có tâm I nằm trên mặt phẳng (P) cho trước:

Phương pháp: Giải tương tự như dạng 4.

Dạng 6: (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt cầu (T) cho trước:

Phương pháp:

- Xác định tâm I và bán kính R' của mặt cầu (T).
- Sử dụng điều kiện tiếp xúc của hai mặt cầu để tính bán kính R

của mặt cầu (S). (Xét hai trường hợp tiếp xúc trong và ngoài)

Chú ý: Với phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$

với $a^2+b^2+c^2-d>0$ thì (S) có tâm $I(-a;-b;-c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Cho hai mặt cầu $S_1(I_1,\ R_1)$ và $S_2(I_2,\ R_2)$.

- $I_1I_2<|R_1-R_2|$ $\Leftrightarrow (S_1),\ (S_2)$ trong nhau
- $I_1I_2>R_1+R_2$ $\Leftrightarrow (S_1),\ (S_2)$ ngoài nhau
- $I_1I_2=|R_1-R_2|$ $\Leftrightarrow (S_1),\ (S_2)$ tiếp xúc trong
- $I_1I_2=R_1+R_2$ $\Leftrightarrow (S_1),\ (S_2)$ tiếp xúc ngoài
- $|R_1-R_2|<I_1I_2<R_1+R_2$ $\Leftrightarrow (S_1),\ (S_2)$ cắt nhau theo một đường tròn

Dạng 7: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, tiếp xúc với mặt phẳng (P) cho trước.

Phương pháp: Bán kính mặt cầu $R=d(I;(P))$

Dạng 8: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, cắt mặt phẳng (P) cho trước theo giao tuyến là một đường tròn thoả điều kiện .

a. Đường tròn có diện tích cho trước.
b. Đường tròn có chu vi cho trước.
c. Đường tròn có bán kính cho trước.

Phương pháp:

- Từ công thức diện tích đường tròn $S=\pi r^2$ hoặc chu vi đường tròn $P=2\pi r$ ta tìm được bán kính đường tròn giao tuyến r.
- Tính $d=d(I,(P))$
- Tính bán kính mặt cầu $R=\sqrt{d^2+r^2}$
- Kết luận phương trình mặt cầu.

Dạng 8: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, cắt mặt phẳng (P) cho trước theo giao tuyến là một đường tròn thoả điều kiện.

Phương pháp:

- Ta có bán kính mặt cầu $R=d(I;(P))$
- Kết luận phương trình mặt cầu.

Dạng 10: Viết phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với một đường thẳng Δ cho trước và có tâm $I(a;b;c)$ cho trước.

Phương pháp

Đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) ta có $R=d(I,\Delta)$.

Dạng 11: Viết phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với một đường thẳng Δ tại tiếp điểm $M(x_o,y_o,z_o)$ thuộc Δ và có tâm I thuộc đường thẳng d cho trước.

Phương pháp

- Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng Δ.
- Toạ độ tâm $I=(P)\cap\Delta$ là nghiệm của phương trình.

- Bán kính mặt cầu $R = IM = d\left(I,\Delta\right)$.
- Kết luận về phương trình mặt cầu $\left(S\right)$

Dạng 12: Viết phương trình mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I\left(a;b;c\right)$ và cắt đường thẳng Δ tại hai điểm A, B thoả mãn điều kiện:
a. Độ dài AB là một hằng số.
b. Tam giác IAB là tam giác vuông.
c. Tam giác IAB là tam giác đều.

Phương pháp

Xác định $d\left(I,\Delta\right) = IH$, vì ΔIAB cân tại I nên $HB = \dfrac{AB}{2}$

a. Bán kính mặt cầu $R = \sqrt{IH^2 + HB^2}$

b. Bán kính mặt cầu $R = \dfrac{IH}{\sin 45^\circ}$

c. Bán kính mặt cầu $R = \dfrac{IH}{\sin 60^\circ}$

MỘT SỐ DẠNG GIẢI NHANH CỰC TRỊ KHÔNG GIAN

Cho $\left(P\right)$ và hai điểm *A, B.* Tìm $M \in \left(P\right)$ để $\left(MA + MB\right)_{\min}$?	+ Nếu A và B trái phía so với $\left(P\right)$ $\Rightarrow M, A, B$ thẳng hàng $\Rightarrow M = AB \cap \left(P\right)$ + Nếu A và B cùng phía so với $\left(P\right)$ Tìm B' là đối xứng của B qua $\left(P\right)$ $\Rightarrow M, A, B'$ thẳng hàng $\Rightarrow M = AB' \cap \left(P\right)$
Cho $\left(P\right)$ và hai điểm *A, B.* Tìm $M \in \left(P\right)$ để $\left\|MA - MB\right\|_{\max}$?	+ Nếu A và B cùng phía so với $\left(P\right)$ $\Rightarrow M, A, B$ thẳng hàng $\Rightarrow M = AB \cap \left(P\right)$ + Nếu A và B trái phía so với $\left(P\right)$ Tìm B' là đối xứng của B qua $\left(P\right)$ $\Rightarrow \left\|MA - MB'\right\| = AB'$
Cho điểm $M\left(x_M; y_M; z_M\right)$ không thuộc các trục và mặt phẳng tọa độ. Viết phương trình $\left(P\right)$ qua M và cắt 3 tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $V_{O.ABC}$ nhỏ nhất?	$\left(P\right): \dfrac{x}{3x_M} + \dfrac{y}{3y_M} + \dfrac{z}{3z_M} = 1$
Viết phương trình mặt phẳng $\left(P\right)$ chứa đường thẳng d, sao cho khoảng cách từ điểm $M \notin d$ đến $\left(P\right)$ là lớn nhất?	$\left(P\right): \begin{cases} Qua\ A \in d \\ \vec{n}_{(P)} = \left[\left[\vec{u}_d, \overrightarrow{AM}\right], \vec{u}_d\right] \end{cases}$
Viết phương trình mặt phẳng $\left(P\right)$ qua A và cách M một khảng lớn nhất	$\left(P\right): \begin{cases} Qua\ A \\ \vec{n}_{(P)} = \overrightarrow{AM} \end{cases}$

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d, sao cho (P) tạo với Δ (Δ không song song với d) một góc lớn nhất là lớn nhất ?	$(P):\begin{cases} Qua\, A \in d \\ \vec{n}_{(P)} = \left[\left[\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta\right]\vec{u}_d\right] \end{cases}$
Cho $\Delta // (P)$. Viết phương trình đường thẳng d song song với Δ và cách Δ một khoảng nhỏ nhất ?	Lấy $A \in \Delta$ gọi A' là hình chiếu vuông góc của A trên (P) $d:\begin{cases} Qua\, A' \\ \vec{u}_d = \vec{u}_\Delta \end{cases}$
Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A cho trước và nằm trong mặt phẳng (P) cho trước sao cho khoảng cách từ điểm M cho trước đến d là lớn nhất (AM không vuông góc với (P)) ?	$d:\begin{cases} Qua\, A \in d \\ \vec{u}_d = \left[\vec{n}_{(P)}, \overrightarrow{AM}\right] \end{cases}$
Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A cho trước và nằm trong mặt phẳng (P) cho trước sao cho khoảng cách từ điểm M cho trước đến d là nhỏ nhất (AM không vuông góc với (P)) ?	$d:\begin{cases} Qua\, A \in d \\ \vec{u}_d = \left[\left[\vec{n}_{(P)}, \overrightarrow{AM}\right], \vec{n}_{(P)}\right] \end{cases}$
Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A \in (P)$ cho trước, sao cho d nằm trong (P) và tạo với đường thẳng Δ một góc nhỏ nhất với Δ cắt nhưng không vuông góc với (P)?	$d:\begin{cases} Qua\, A \in d \\ \vec{u}_d = \left[\left[\vec{n}_{(P)}, \overrightarrow{AM}\right], \vec{n}_{(P)}\right] \end{cases}$